



Hraniční kmitočty propustného a nepropustného pásma jsou ve většině případů specifikovány v [Hz] společně se vzorkovacím kmitočtem číslicového filtru. Návrhové algoritmy číslicových filtrů však vychází z číslicových úhlových kmitočtů. Proto před začátkem návrhu musí být výchozí hraniční kmitočty normovány vztahem (7.4).

Příklad 7.2

Jsou dány hraniční kmitočty dolní propusti $f_p = 1$ kHz, $f_s = 2$ kHz a vzorkovací kmitočet $f_v = 10$ kHz. Určete příslušné číslicové úhlové kmitočty.

Řešení:

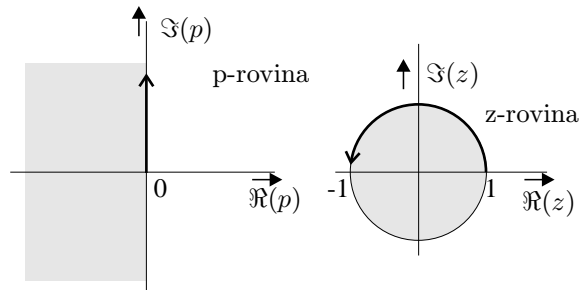
$$\hat{\omega}_p = \omega_p T = \frac{2\pi f_p}{f_v} = \frac{\pi}{5} = 0,6284,$$

$$\hat{\omega}_s = \omega_s T = \frac{2\pi f_s}{f_v} = \frac{2\pi}{5} = 1,257.$$



7.1. Číslicové filtry IIR

Přenosová funkce číslicových filtrů IIR má, stejně jako v případě analogových filtrů, tvar racionálně lomené funkce. Díky této podobnosti je možné vhodnou transformací analogové přenosové funkce, definované v rovině p , získat přenosovou funkci IIR v rovině z . Tento způsob návrhu bývá označován jako nepřímý nebo také jako transformační. Na transformaci $p \rightarrow z$ klademe dvě nutné podmínky, znázorněné



Obrázek 7.2: Obecné požadavky na transformační předpis $p \rightarrow z$

na obrázku 7.2.

1. Imaginární osa roviny $p = j\omega$ se musí transformovat na jednotkovou kružnici v rovině $z = e^{j\hat{\omega}}$. Tato podmínka je nutná, aby se zachovávaly kmitočtové charakteristiky analogového filtru.

2. Levá polorovina $\Re(p) < 0$ roviny p se musí transformovat dovnitř jednotkové kružnice $|z| < 1$ roviny z . Tato podmínka zaručuje, že stabilní analogový filtr se bude transformovat na stabilní číslicový filtr.

Užívanými transformačními metodami jsou:

1. invariantní impulsní odezva,
2. diskrétní aproximace derivace,
3. bilineární transformace.

Nejčastěji se používá bilineární transformace.

7.1.1. Invariantní impulsní odezva

Tato transformační metoda se týká vzájemné identifikace časových odezev filtru na jednotkový impuls. Pod pojmem invariantní impulsní odezva rozumíme, že k impulsní odezvě $h_a(t)$ známého analogového filtru hledáme impulsní odezvu číslicového filtru $h_d[n]$, která se shoduje v okamžicích vzorkování $t = nT$ s analogovou předlohou

$$h_d[n] = h_a(nT). \quad (7.5)$$

To znamená, že rozklad analogové přenosové funkce na parciální zlomky

$$H_a(p) = \sum_{i=1}^N \frac{k_i}{p - p_{\infty i}}, \quad (7.6)$$

s příslušnou impulsní odezvou

$$h_a(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H_a(p)\} = \sum_{i=1}^N k_i e^{p_{\infty i} t}. \quad (7.7)$$

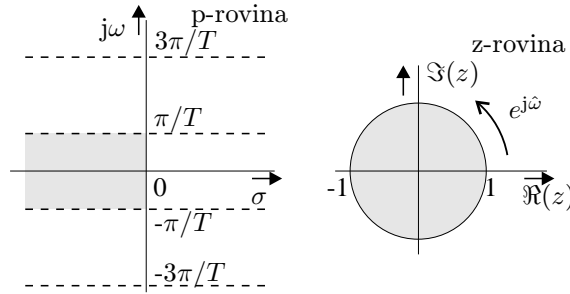
je nahrazen přenosovou funkcí číslicového filtru, jenž má shodnou impulsní odezvu v bodech $t = nT$ a tedy

$$h_d[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H_d(z)\} = \sum_{i=1}^N k_i e^{p_{\infty i} nT}, \quad (7.8)$$

Přenosová funkce takového číslicového filtru má potom tvar

$$H_d(z) = \sum_{i=1}^N \frac{k_i}{1 - e^{p_{\infty i} T} z^{-1}}. \quad (7.9)$$

Z předchozích vztahů i z obr.7.3 je zřejmé, že stabilní analogová přenosová funkce s póly v levé polorovině $\Re(p_i) < 0$ se transformuje na stabilní číslicovou přenosovou


 Obrázek 7.3: Zobrazení roviny p na rovinu z při transformaci pólů $p_{\infty i} \rightarrow e^{p_{\infty i} T}$

funkci, jejíž póly jsou $|z_i = e^{p_{\infty i} T}| < 1$. Kmitočtová charakteristika číslicového filtru je rovna kmitočtové odezvě periodicky vzorkované analogové přenosové funkce a tedy

$$H_d(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{h_a(0+)}{2} + \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_a\left(j\frac{\hat{\omega}}{T} + j\frac{2\pi}{T}n\right), \quad (7.10)$$

kde

$$h_a(0+) = \lim_{p \rightarrow \infty} p H_a(p).$$

Jestliže je splněna podmínka

$$H_a(j\omega) \cong 0 \text{ pro } |\omega| \geq \frac{\pi}{T} \quad (7.11)$$

a

$$h_a(0+) = 0 \quad (7.12)$$

jsou kmitočtové odezvy analogové a číslicové přenosové funkce až na násobnou konstantu $1/T$ přibližně shodné

$$H_d(e^{j\hat{\omega}}) \cong \frac{1}{T} H_a(j\frac{\hat{\omega}}{T}) \text{ pro } |\omega| < \frac{\pi}{T}. \quad (7.13)$$

Čitatel číslicové přenosové funkce musíme proto násobit vzorkovací periodou T . Podmínka (7.11) může být splněna pro reálný filtr pouze přibližně. Podmínka (7.12) bude splněna, pokud řád jmenovatele analogové přenosové funkce $H_a(p)$ je alespoň o dva vyšší než řád čitatele.

Popisovaná metoda dává dobré výsledky u transformací přenosových funkcí typu dolní a pásmová propust získaných Butterworthovou a Čebyševovou aproximací, při kterých jsou splněny obě podmínky (7.11) a (7.12). Metoda se nehodí pro transformace přenosových funkcí, které mají nulové body přenosu na konečných kmitočtech, jež jsou výsledkem inverzní Čebyševovy a Caurovy transformace. Přenosové funkce se v těchto případech nekorektně transformují. Je to způsobeno rozkladem na parciální zlomky vztahem (7.6). Výhodou uvedené transformační metody je, že zachovává jak modulovou tak i fázovou kmitočtovou charakteristiku analogového filtru.

Příklad 7.3

Metodou invariantní impulsní odezvy navrhnete číslicový filtr. Pro transformaci použijte přenosovou funkci 3. řádu typu dolní propust s $\omega_p = 1 \text{ s}^{-1}$ (Butterworthova aproximace). Použijte vzorkovací kmitočet $\omega_v = 5 \text{ s}^{-1}$.

$$H_a(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}$$

Řešení:

Jmenovatel přenosové funkce $H_a(p)$ rozložíme na součin kořenových činitelů a provedeme rozklad na parciální zlomky.

$$\begin{aligned} H_a(p) &= \frac{1}{(p+1)(p+0,5+j0,866025)(p+0,5-j0,866025)} = \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{k_i}{p-p_{\infty i}} = \\ &= \frac{1}{p+1} + \frac{-0,5+j0,288675}{p+0,5+j0,866025} + \frac{-0,5-j0,288675}{p+0,5-j0,866025}. \end{aligned}$$

Vypočítáme periodu vzorkování

$$T = \frac{2\pi}{\omega_v} = \frac{2\pi}{5} = 1,256637062.$$

Sestavíme číslicovou přenosovou funkci $H_d(z)$ pomocí vztahu (7.9), kde

$$\begin{aligned} e^{p_{\infty 1}T} &= e^{-1 \cdot 1,256637} = 0,284609, \\ e^{p_{\infty 2}T} &= e^{(-0,5-j0,866025) \cdot 1,256637} = 0,247543 - j0,472580, \\ e^{p_{\infty 3}T} &= e^{(-0,5+j0,866025) \cdot 1,256637} = 0,247543 + j0,472580. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_d(z) &= \sum_{i=1}^3 \frac{k_i}{1 - e^{p_{\infty i}T} z^{-1}} = \frac{1}{1 - 0,284609 z^{-1}} + \\ &+ \frac{-0,5+j0,288675}{1 - (0,247543 - j0,472580) z^{-1}} + \frac{-0,5-j0,288675}{1 - (0,247543 + j0,472580) z^{-1}} = \\ &= \frac{0,309909759 z^2 + 0,136502194 z}{z^3 - 0,779697180 z^2 + 0,425516209 z - 0,0810025921}. \end{aligned}$$

Číslicovou přenosovou funkci $H_d(z)$ musíme nakonec vynásobit vzorkovací periodou T , jak vyplývá ze vztahu (7.13)

$$T H_d(z) = \frac{0,389444089 z^2 + 0,171533716 z}{z^3 - 0,779697180 z^2 + 0,425516209 z - 0,0810025921}.$$

**Program 21**

V prostředí Matlab navrhnete číslicový filtr metodou invariantní impulsní odezvy. Použijte stejné zadání jako v příkladu 7.3. Vypočítejte kmitočtovou a impulsní charakteristiku analogového a číslicového filtru a obě charakteristiky vykreslete podobně jako na obrázku 7.4.

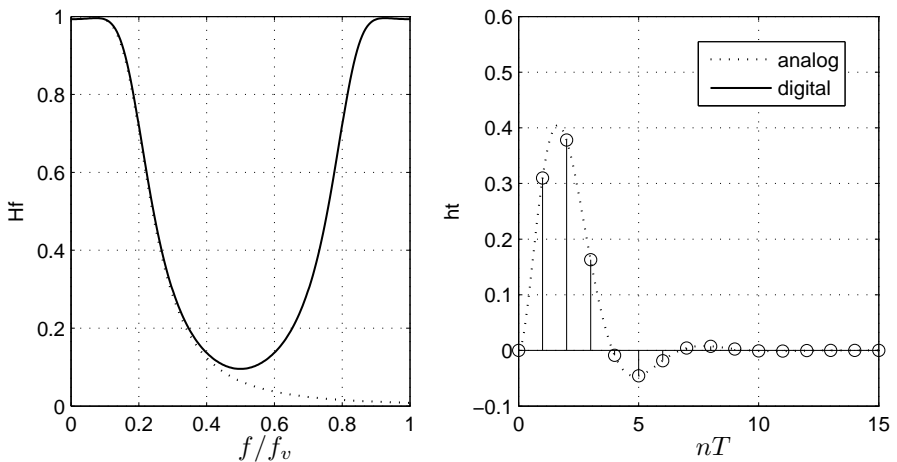
Nové operátory a funkce použité v programu:

`impinvar` konverze analogové přenosové funkce na číslicovou přenosovou funkci metodou invariantní impulsní odezvy

Program vyžaduje *Symbolic Math Toolbox* a *Signal Processing Toolbox*.

Vlastní program:

```
fs=5/(2*pi);
[b,a]=butter(3,1,'s')
[bz,az] =impinvar(b,a,fs)
f=linspace(0,fs,200);
Ha=freqs(b,a,2*pi*f);
Hd=freqz(bz,az,f,fs);
figure(1)
subplot(1,2,1)
plot(f/fs,abs(Ha),'b',f/fs,abs(Hd),'g')
grid
Hp=poly2sym(b)/poly2sym(a);
ha=vpa(ilaplace(Hp),5)
t=linspace(0,15/fs,200);
subplot(1,2,2)
plot(t*fs,subs(ha))
grid
[hd,td]=impz(bz,az,16,fs);
hold on
stem(td*fs,hd*fs,'g')
hold off
```



Obrázek 7.4: Porovnání kmitočtové charakteristiky a impulsní odezvy

7.1.2. Aproximace derivace

Tato transformační metoda je založena na diskrétní aproximaci derivace spojité funkce, kterou je možné provést několika způsoby. Jednou z možností je náhrada první derivace první zpětnou diferencí podle vztahu

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=nT} \longrightarrow \frac{y[n] - y[n-1]}{T}, \quad (7.14)$$

kde T je vzorkovací perioda, $y[n] = y(nT)$ jsou vzorky spojité funkce v bodech $t = nT$. Postup náhrady derivace byl demonstrován na obrázku 1.7 v kapitole 1.3.2, ve které byla také odvozena transformace pro druhou derivaci. Na vztah (7.14) může být aplikována \mathcal{Z} -transformace, která vede na výsledek

$$\mathcal{Z} \left\{ \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=nT} \right\} = \frac{1 - z^{-1}}{T} Y(z). \quad (7.15)$$

Pokud dále uijeme vztah pro Laplaceovu transformaci derivace při nulových počátečních podmínkách

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{dy}{dt} \right\} = p Y(p), \quad (7.16)$$

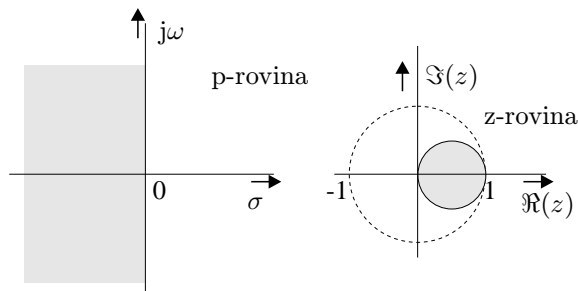
lze vyjádřit přímý transformační vztah mezi rovinami p a z ve tvaru

$$p = \frac{1 - z^{-1}}{T} = \frac{1}{T} \frac{z - 1}{z}. \quad (7.17)$$

Ze vztahu (7.17) je možné odvodit, jakým způsobem se transformuje imaginární osa roviny $p = j\omega$. Z rovnice

$$z = \frac{1}{1 - pT} = \frac{1}{1 - j\omega T} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1 + j\omega T}{1 - j\omega T} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + e^{2j \arctan(\omega T)} \right) \quad (7.18)$$

vyplývá, že pro všechna ω je $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$, což je rovnice kružnice se středem v $\frac{1}{2}$, o poloměru $\frac{1}{2}$. Toto zobrazení je ukázáno na obrázku 7.5. Je zřejmé, že není



Obrázek 7.5: Zobrazení roviny p na rovinu z při transformaci zpětnou diferencí splněna první z nutných podmínek² kladených na transformaci $p \rightarrow z$ a bude

²viz začátek kapitoly 7.1

tedy docházet ke značnému zkreslení kmitočtových charakteristik digitálního filtru. Druhá nutná podmínka je touto transformací splněna. Uvedená metoda se hodí pouze na transformace dolních propustí za předpokladu volby dostatečně velkého vzorkovacího kmitočtu.

Kromě náhrady první derivace spojité funkce první zpětnou diferencí je možné použít i první dopřednou diferencí definovanou vztahem

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=nT} \longrightarrow \frac{y[n+1] - y[n]}{T}. \quad (7.19)$$

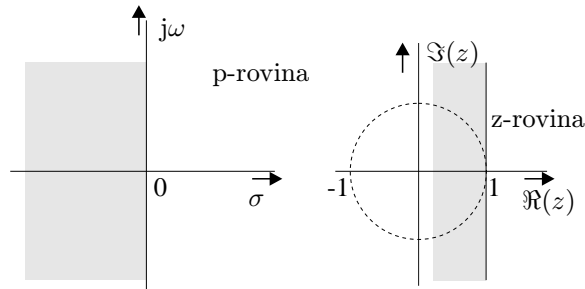
Stejně jako v předchozím případě je možné vyjádřit přímý transformační vztah mezi rovinami p a z ve tvaru

$$p = \frac{z - 1}{T}. \quad (7.20)$$

Odtud plyne, že imaginární osa roviny p se transformuje podle rovnice

$$z = 1 + pT = 1 + j\omega T, \quad (7.21)$$

ze které je zřejmé, že imaginární osa se posune o jedničku doprava, jak je ukázáno na obrázku 7.6. Z uvedeného zobrazení je zřejmé, že není splněna ani jedna z nut-



Obrázek 7.6: Zobrazení roviny p na rovinu z při transformaci dopřednou diferencí ných podmínek kladených na transformace $p \rightarrow z$. Kromě zkreslení kmitočtových charakteristik digitálního filtru, může při této transformaci vzniknout nestabilní digitální filtr.

7.1.3. Bilineární transformace

Tato transformační metoda je založena na numerické integraci diferenciální rovnice prvního řádu

$$\frac{d}{dt}y(t) = x(t). \quad (7.22)$$

Numerickou integrací této rovnice lichoběžníkovou metodou pro $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ je možné vyjádřit následujícím vztahem

$$y(t_2) - y(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} x(t) dt \approx (t_2 - t_1) \frac{x(t_1) + x(t_2)}{2}. \quad (7.23)$$

V následujícím kroku se provede dosazení za $t_1 = (n-1)T$ a $t_2 = nT$

$$y(nT) - y((n-1)T) = \frac{T}{2}(x((n-1)T) + x(nT)). \quad (7.24)$$

Na tuto diferenční rovnici se dále aplikuje \mathcal{Z} -transformace, která vede na výsledek

$$(1 - z^{-1})Y(z) = \frac{T}{2}(z^{-1} + 1)X(z). \quad (7.25)$$

Na výchozí diferenční rovnici (7.22) je možné aplikovat Laplaceovu transformaci, která vede při nulových počátečních podmínkách na výsledek

$$pY(p) = X(p). \quad (7.26)$$

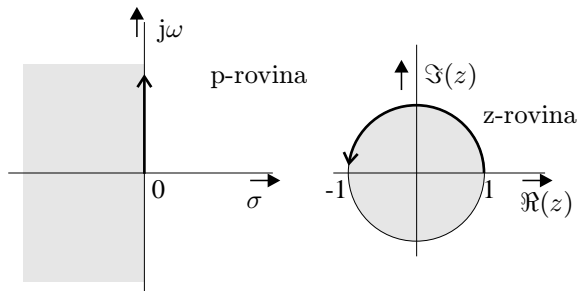
Přímý transformační vztah pro bilineární transformaci potom vychází ve tvaru

$$p = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = \frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1}. \quad (7.27)$$

Ze vztahu (7.27) je možné odvodit, jakým způsobem se transformuje imaginární osa roviny $p = j\omega$. Z rovnice

$$z = \frac{1 + p\frac{T}{2}}{1 - p\frac{T}{2}} = \frac{1 + j\omega\frac{T}{2}}{1 - j\omega\frac{T}{2}} = e^{2j \arctan(\omega\frac{T}{2})} \quad (7.28)$$

vyplývá, že pro všechna ω je $|z| = 1$, což je rovnice kružnice se středem v 1, o poloměru 1. Toto zobrazení je ukázáno na obrázku 7.7. Ze zobrazení je zřejmé,



Obrázek 7.7: Zobrazení roviny p na rovinu z při bilineární transformaci

že bilineární transformace splňuje obě transformační podmínky.³ Nicméně z rovnice (7.28) je možné odvodit, že dochází ke zkreslení kmitočtové osy podle vztahu

$$e^{j\omega_d T} = e^{2j \arctan(\omega_a \frac{T}{2})} \Rightarrow \omega_d = \frac{2}{T} \arctan\left(\frac{\omega_a T}{2}\right). \quad (7.29)$$

V případě, že je návrh soustředěn pouze na modulovou charakteristiku, je možné vliv tohoto zkreslení eliminovat tím, že provedeme předzkreslení analogové kmitočtové osy vztahem

$$\omega_a = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\hat{\omega}_d}{2}\right). \quad (7.30)$$

³viz začátek kapitoly 7.1

typ	nový okraj	$p \rightarrow z$	transformační formule
DP	$\hat{\omega}_p$	$\kappa \frac{z-1}{z+1}$	$\kappa = \omega_p \cotan \frac{\hat{\omega}_p}{2}$
HP	$\hat{\omega}_p$	$\kappa \frac{z+1}{z-1}$	$\kappa = \omega_p \tan \frac{\hat{\omega}_p}{2}$
PP	střed PP $\hat{\omega}_0$ okraje PP $\hat{\omega}_1 < \hat{\omega}_2$	$\kappa \frac{z^2 - 2\alpha z + 1}{z^2 - 1}$	$\alpha = \cos \hat{\omega}_0 = \frac{\cos(\frac{\hat{\omega}_2 + \hat{\omega}_1}{2})}{\cos(\frac{\hat{\omega}_2 - \hat{\omega}_1}{2})}$ $\kappa = \omega_p \cotan[(\hat{\omega}_2 - \hat{\omega}_1)/2]$
PZ	střed PZ $\hat{\omega}_0$ okraje PZ $\hat{\omega}_1 < \hat{\omega}_2$	$\kappa \frac{z^2 - 1}{z^2 - 2\alpha z + 1}$	$\alpha = \cos \hat{\omega}_0 = \frac{\cos(\frac{\hat{\omega}_2 + \hat{\omega}_1}{2})}{\cos(\frac{\hat{\omega}_2 - \hat{\omega}_1}{2})}$ $\kappa = \omega_p \tan[(\hat{\omega}_2 - \hat{\omega}_1)/2]$

Tabulka 7.1: Kmitočtová transformace analogové DP s okrajem propustného pásma ω_p na čtyři různé typy číslicových přenosových funkcí filtrů

Zahrneme-li toto předzkreslení do návrhových postupů, potom je třeba analogovou proměnnou p v rovnici (7.27) normovat vztahem (7.30). Například má-li analogová dolní propust hraniční kmitočet okraje propustného pásma ω_p , potom po normování bude

$$\omega_p \rightarrow \frac{2}{T} \tan \frac{\hat{\omega}_p}{2}. \quad (7.31)$$

Normováním pravé i levé strany definiční rovnice (7.27) dostáváme bilineární transformaci ve tvaru

$$s = \kappa_0 \frac{z-1}{z+1}, \quad (7.32)$$

ve kterém

$$\kappa_0 = \cotan \frac{\hat{\omega}_p}{2}. \quad (7.33)$$

Vztah (7.32) platí pro transformaci analogové NDP s okrajem propustného pásma $\Omega_p = 1$ na číslicovou DP s okrajem propustného pásma $\hat{\omega}_p$. V tabulce 7.1 jsou uvedeny obecné kmitočtové transformace analogové DP s okrajem propustného pásma ω_p na čtyři různé typy číslicových přenosových funkcí filtrů DP, HP, PP a PZ.

Příklad 7.4

Metodou bilineární transformace navrhňte číslicový filtr. Pro transformaci použijte normovanou přenosovou funkci 3. řádu typu dolní propust s hraničním kmitočtem propustného pásma $\omega_p = 1 \text{ s}^{-1}$, získanou Butterworthovou aproximací. Použijte hodnotu vzorkovacího kmitočtu $\omega_v = 5 \text{ s}^{-1}$.

$$H_a(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}$$

Řešení:

Nejprve vypočítáme periodu vzorkování

$$T = \frac{2\pi}{\omega_v} = \frac{2\pi}{5} = 1,256\ 637.$$

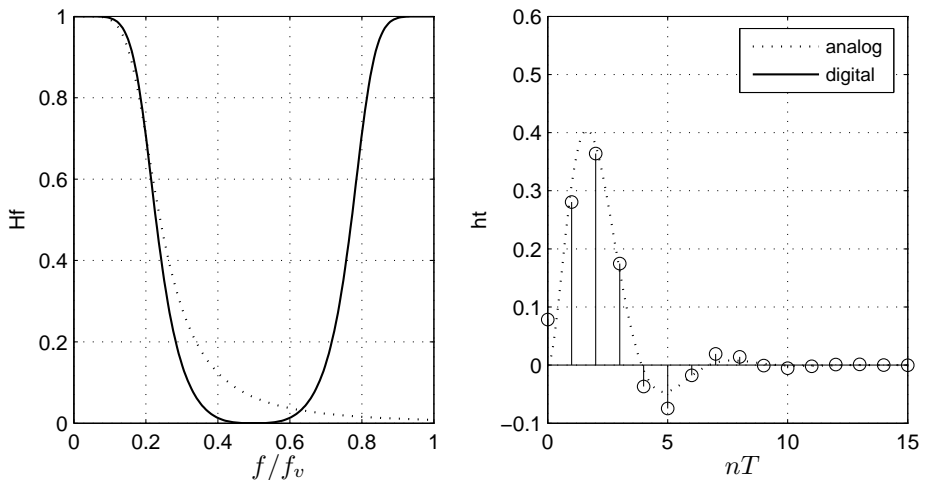
Dále provedeme transformaci přenosové funkce analogového filtru užitím vztahu pro bilineární transformaci (7.32), přičemž v našem případě bude

$$\kappa = \omega_p \cotan \frac{\omega_p T}{2} = 1,376\ 382.$$

Dosažením a úpravou získáme přenosovou funkci číslicového filtru

$$\begin{aligned} H_d(z) &= H_a(1,376\ 382 \frac{z-1}{z+1}) = \\ &= \frac{1}{2,607\ 455 \frac{(z-1)^3}{(z+1)^3} + 3,788\ 854 \frac{(z-1)^2}{(z+1)^2} + 2,752\ 764 \frac{z-1}{z+1} + 1} = \\ &= \frac{0,098\ 531\ 16 (z+1)^3}{z^3 - 0,577\ 240\ 5 z^2 + 0,421\ 787\ 0 z - 0,056\ 297\ 24} \end{aligned}$$

Na obr. 7.8 je ukázáno porovnání modulových charakteristik a impulsních odezev analogového a číslicového filtru. Z grafů je vidět, že bilineární transformace, díky kmitočtovému zkreslení, zvětšuje strmost filtru v přechodovém pásmu.



Obrázek 7.8: Porovnání kmitočtové charakteristiky a impulsní odezvy

Program 22

V prostředí Matlab navrhnete číslicový filtr metodou bilineární transformace. Použijte stejné zadání jako v příkladu 7.4. Vypočítejte kmitočtovou a impulsní charakteristiku analogového a číslicového filtru a obě charakteristiky vykreslete podobně jako na obr. 7.8.

Nové operátory a funkce použité v programu:

`bilinear` konverze analogové přenosové funkce na číslicovou přenosovou funkci metodou bilineární transformace

Program vyžaduje *Symbolic Math Toolbox* a *Signal Processing Toolbox*.

Vlastní program:

```
fs=5/(2*pi);
fp=1/(2*pi);
[b,a]=butter(3,1,'s')
[bz,az]=bilinear(b,a,fs,fp)
%přímý návrh digitálního filtru
%[bz,az]=butter(3,fp/fs*2)
f=linspace(0,fs,200);
Ha=freqs(b,a,2*pi*f);
Hd=freqz(bz,az,f,fs);
figure(1)
subplot(1,2,1)
plot(f/fs,abs(Ha),'b',f/fs,abs(Hd),'g')
grid
Hp=poly2sym(b)/poly2sym(a);
ha=vpa(ilaplace(Hp),5)
t=linspace(0,15/fs,200);
subplot(1,2,2)
plot(t*fs,subs(ha))
grid
[hd,td]=impz(bz,az,16,fs);
hold on
stem(td*fs,hd*fs,'g')
hold off
```

7.1.4. Kmitočtové transformace

Kmitočtové transformace umožňující transformace digitálního filtru typu dolní propusti na libovolně jiný typ číslicového filtru (DP, HP, PP, PZ), jsou založeny na obdobných požadavcích jako tomu je u analogových filtrů. Jedná se o taková zobrazení $g(z)$, která nemění průběh modulové charakteristiky v propustném a nepropustném pásmu a mění jen polohu okrajů propustného pásma. Takové funkce zobrazení, které budeme uvažovat, jsou typu číslicový fázovací dvojbran

$$g_1(z) = \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}, \quad g_2(z) = \frac{z^{-1} - \beta}{1 - \beta^* z^{-1}} \frac{z^{-1} - \beta^*}{1 - \beta z^{-1}}. \quad (7.34)$$

typ	nový okraj	$z \rightarrow \bar{z}$	transformační formule
DP	$\bar{\omega}_p$	$\frac{\bar{z} - \alpha}{1 - \alpha\bar{z}}$	$\alpha = \frac{\sin[(\hat{\omega}_p - \bar{\omega}_p)/2]}{\sin[(\hat{\omega}_p + \bar{\omega}_p)/2]}$
HP	$\bar{\omega}_p$	$-\frac{\bar{z} - \alpha}{1 - \alpha\bar{z}}$	$\alpha = \frac{\cos[(\hat{\omega}_p - \bar{\omega}_p)/2]}{\cos[(\hat{\omega}_p + \bar{\omega}_p)/2]}$
PP	$\bar{\omega}_{p1}$ a $\bar{\omega}_{p2}$	$-\frac{\bar{z}^2 - \frac{2\alpha\beta}{\beta+1}\bar{z} + \frac{\beta-1}{\beta+1}}{1 - \frac{2\alpha\beta}{\beta+1}\bar{z} + \frac{\beta-1}{\beta+1}\bar{z}^2}$	$\alpha = \frac{\cos[(\hat{\omega}_{p2} + \bar{\omega}_{p1})/2]}{\cos[(\hat{\omega}_{p2} - \bar{\omega}_{p1})/2]}$ $\beta = \frac{\tan[\hat{\omega}_p/2]}{\tan[(\hat{\omega}_{p2} - \bar{\omega}_{p1})/2]}$
PZ	$\bar{\omega}_{p1}$ a $\bar{\omega}_{p2}$	$\frac{\bar{z}^2 - \frac{2\alpha}{\beta+1}\bar{z} + \frac{1-\beta}{\beta+1}}{1 - \frac{2\alpha}{\beta+1}\bar{z} + \frac{1-\beta}{\beta+1}\bar{z}^2}$	$\alpha = \frac{\cos[(\hat{\omega}_{p2} + \bar{\omega}_{p1})/2]}{\cos[(\hat{\omega}_{p2} - \bar{\omega}_{p1})/2]}$ $\beta = \tan[\hat{\omega}_p/2]\tan[(\hat{\omega}_{p2} - \bar{\omega}_{p1})/2]$

Tabulka 7.2: Kmitočtová transformace číslicové dolní propusti s okrajem propustného pásma $\hat{\omega}_p$ na čtyři různé typy přenosových funkcí

Uvažujme nyní transformaci $H(z) \rightarrow H(g_1(z))$. Protože na jednotkové kružnici platí identita

$$j \tan \frac{\hat{\omega}}{2} = \left. \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right|_{z=e^{j\hat{\omega}}}, \quad (7.35)$$

a funkce $\tan \frac{\hat{\omega}}{2}$ se chová jako dolní propust, vzniká logická otázka, jaká dolní propust vznikne transformací $g_1(z)$

$$\tan \frac{\bar{\omega}}{2} = -j \left. \frac{1 - \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}}{1 + \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}} \right|_{z=e^{j\bar{\omega}}} = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \tan \frac{\hat{\omega}}{2}. \quad (7.36)$$

Obdrželi jsme obecný vztah mezi kmitočty transformovaných dolních propustí, které přirozeně platí i pro okraje propustných pásem $\bar{\omega}_p$ a $\hat{\omega}_p$

$$\tan \frac{\bar{\omega}_p}{2} = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \tan \frac{\hat{\omega}_p}{2}. \quad (7.37)$$

Vyřešíme rovnici (7.37) a dostaneme

$$\alpha = \frac{\tan \frac{\hat{\omega}_p}{2} - \tan \frac{\bar{\omega}_p}{2}}{\tan \frac{\hat{\omega}_p}{2} + \tan \frac{\bar{\omega}_p}{2}} = \frac{\sin[(\hat{\omega}_p - \bar{\omega}_p)/2]}{\sin[(\hat{\omega}_p + \bar{\omega}_p)/2]}. \quad (7.38)$$

Na základě podobných úvah lze sestavit tabulku 7.2. Pro typické kmitočty vzniklé transformací se v tabulce používají symboly $\bar{\omega}$, zatímco v případě původní dolní číslicové propusti kmitočty označujeme $\hat{\omega}$.