

Modifikovaná metoda uzlových napětí s redukcí počtu rovnic

Úvod

Klasická metoda uzlových napětí vychází z 1. Kirchhoffova zákona a její maticové vyjádření se často používá pro „počítačové“ řešení elektrických lineárních obvodů [1]. Její vyjádření uvádějí rovnice (1).

$$\mathbf{Y} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{I}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{U} = \mathbf{Y}^{-1} \cdot \mathbf{I} \quad (1)$$

kde \mathbf{Y} je admitanční matice soustavy,

\mathbf{U} je vektor neznámých uzlových napětí a

\mathbf{I} je vektor všech budících proudů do jednotlivých uzlů soustavy.

Řešením můžeme potom získat jakékoliv uzlové napětí u_k , jestliže známe všechny budící proudy i_j podle následující rovnice (2).

$$u_k = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^n \Delta_{jk} i_j \quad (2)$$

Nevýhodou této metody je především nemožnost popisu obvodu obsahujícího řízené zdroje (kromě zdroje proudu řízeného napětím). Dále je to nemožnost řešením daných rovnic určit proudy jednotlivých větví.

Tyto nedostatky odstraňuje tzv. modifikovaná metoda uzlových napětí popsaná např. v [2].

Princip modifikované metody

Princip metody vyplývá z toho, že proměnnou nemusí být jenom napětí, ale i proud (u prvků řízených proudem) nebo některá z pravých stran rovnic obsahuje principiálně 0 (nelze budít do daného uzlu – u napěťových zdrojů). V každém případě nemusí mít některé prvky matice rozměr [S], takže matici nelze nazývat admitanční nebo vodivostní, ale zato lze pomocí této matice popsat jakýkoliv lineární prvek obvodu daný rovnicí

$$x(u_a - u_b) + yi_k = z,$$

kde u_a a u_b jsou napětí na prvku,

i_k je proud daným prvkem a

x , y a z jsou konstanty [2].

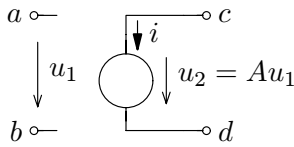
Tento popis je natolik univerzální, že jím lze popsat velmi širokou třídu lineárních obvodů. V případě zdrojů řízenými proudem lze zápis uskutečnit dvěma způsoby:

- Řídicí proud tekoucí některým prvkem lze v matici vyjádřit pomocí uzlových napětí na daném prvku. Potom není nutné pro řídicí vstup zdroje přidávat další uzel, ale matice musí rozšířit minimálně o tento řídicí proud [2].
- Při druhém způsobu jsou řídicí vstupy zdroje zkratovány. Tím se přidá další uzel obvodu, a matice se tím opět rozšíří o řídicí proud.

Oba způsoby jsou ve výsledku téměř identické. Druhý způsob má výhodu ve shodné struktuře zápisu všech řízených zdrojů v popisu obvodu, což je výhodné pro počítačové zpracování, kde je také možné sestavovat přímo redukovanou matici a tím zbytečně nezvyšovat nároky na výpočet.

Odvoďme tedy konkrétní pravidla pro popis všech typů řízených zdrojů i dalších (neregulárních) prvků.

Napětím řízený zdroj napětí (VCVS)



$$(u_a - u_b)A - (u_c - u_d) = 0$$

$$i_c = i, \quad i_d = -i$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} & & & & 1 \\ & & & & -1 \\ \hline A & -A & -1 & 1 & \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \\ u_d \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{0a} \\ I_{0b} \\ I_{0c} \\ I_{0d} \\ 0 \end{bmatrix}$$

VCVS lze popsat výše uvedenými rovnicemi, jejichž maticový zápis je uveden. Linky oddělují přidaný řádek a sloupec. Přidanou veličinou je proud i . Všimněme si, že součet pátého sloupce je nulový. Pokud nepožadujeme výpočet proudu i řízeným zdrojem, lze tuto matici redukovat podle pravidel matematické algebry. Lze tedy přičíst 3. řádek k 4. a na místo 3. řádku lze posunout řádek pátý. Nulový 5. sloupec potom vypustíme a získáme opět matici 4×4 . Tím sice nemůžeme přímo vypočítat proud i , ale matice nezvětší svoji dimenzi. Jelikož jsme vypustili původní 3. řádek, ztrácíme možnost buzení přímo do tohoto uzlu (pravá strana 3. rovnice je nyní nulová), ale jak je patrné, buzení do uzlu d je identické jako buzení do uzlu c (ve skutečnosti je na místě prvku I_{0d} prvek $I_{0c} + I_{0d}$). Můžeme tedy napsat pravidlo pro zařazení tohoto zdroje do admitanční matice.

Zařazení VCVS: Přičteme řádek odpovídající uzlu c (řádek c) k řádku odpovídajícímu uzlu d , řádek c potom vynulujeme. K takto vzniklé matici přičteme v odpovídajících uzlech následující matici.

u_a	u_b	u_c	u_d	
				I_{0a}
				I_{0b}
A	$-A$	-1	1	0
				I_{0d}

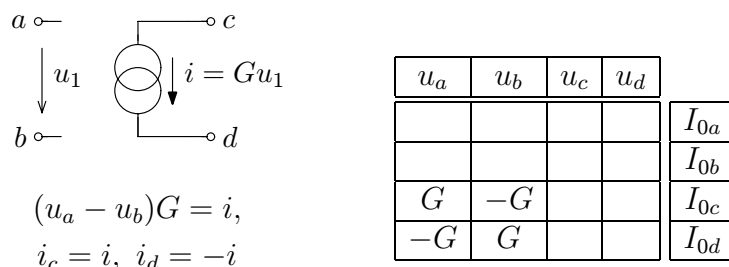
přičteme v odpovídajících uzlech následující matici.

i_0	u_b	u_c	u_d	
1				I_{0a}
-1				I_{0b}
K				I_{0c}
$-K$				I_{0d}

Napětím řízený zdroj proudu (VCCS)

Jako v předchozích případech lze zde odvodit pravidlo pro zařazení napětím řízeného zdroje proudu.

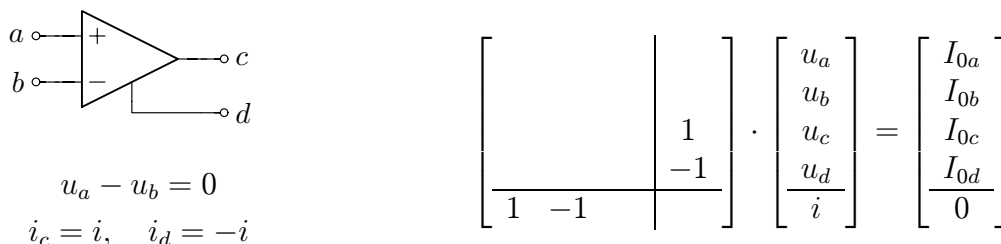
Zařazení VCCS: K původní matici přičteme v odpovídajících uzlech následující matici.



Stejným způsobem lze např. odvodit matice ideálního operačního, transimpedančního a transkonduktančního zesilovače, transformátoru, neřízeného zdroje proudu i napětí, nulátoru a norátoru a fázově řízeného spínače pro popis SC obvodů.

Jako poslední odvodíme ještě pravidlo pro zařazení ideálního operačního zesilovače. Lze sice využít napětím řízeného zdroje napětí a výsledek počítat jako limitu pro napěťový přenos $A \rightarrow \infty$, ale tím bychom vyloučili další redukci matice, jak je níže ukázáno.

Ideální operační zesilovač (IOZ)



Jestliže nepotřebujeme vypočítat přímo proud i , lze matici zredukovat podle níže uvedeného pravidla.

Zařazení IOZ: Přičteme řádek odpovídající uzlu c (řádek c) k řádku odpovídající uzlu d a dále přičteme sloupec odpovídající napětí u_a (sloupec a) ke sloupci odpovídajícímu napětí u_b . Sloupec a a řádek c vynulujeme. Všechny nulové řádky (c a poslední řádek) a sloupec (u_a a i) vypustíme.

Tím opět ztrácíme možnost buzení přímo do uzlu c . Ve většině zapojení je navíc uzel d uzlem referenčním. Potom vypustíme sloupec i řádek d , resp. je vůbec nesestavujeme. Zde bychom dostali tedy matici 2×2 , přičemž proměnné by byly v pořadí $u_a = u_b, u_c$.

Pozn.: To, že lze sčítat řádky nebo sloupce matice v případech, které byly výše ukázány je patrné z následujících jednoduchých příkladů.

V tomto případě přičtením prvního řádku (první rovnice) k druhému eliminujeme proměnnou x .

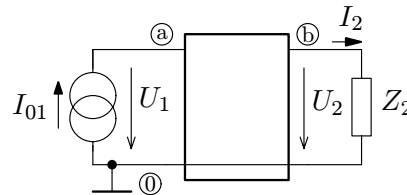
$$\begin{aligned} x+2y -z &= 3 \\ -x+5y+3z &= 2 \\ 0 -y +z &= 1 \end{aligned}$$

V tomto případě přičtením prvního sloupce koeficientů k druhému eliminujeme opět proměnnou x , jelikož $x = y$.

$$\begin{aligned} x -y +0 &= 0 \\ -2x+5y+3z &= 2 \\ x-5y +z &= 1 \end{aligned}$$

Výpočet charakteristických parametrů dvojbranu

Jak bylo uvedeno v úvodu, lze pro výpočet jakéhokoliv uzlového napětí použít vztah (2). Ve většině případů je však možné elektronické zapojení znázornit ve tvaru dvojbranu se vstupními a výstupními svorkami, jak je uvedeno na obrázku 1.



Obrázek 1: Dvojbranové uspořádání elektronického zapojení

Potom nás zajímají pouze vstupní a výstupní veličiny (proudy a napětí) a nikoliv všechna uzlová napětí vnitřního zapojení takového dvojbranu. V tom případě lze pro charakteristické vlastnosti dvojbranu odvodit následující vztahy [1].

Pro veličiny na svorkách platí

$$U_1 = u_a, \quad U_2 = u_b, \quad (3)$$

$$I_{01} = i_a, \quad I_2 = -I_{02} = -i_b. \quad (4)$$

Jak je patrné z výše uvedeného obrázku, je v tomto uspořádání možné budít pouze do dvou uzlů, přičemž většinou budeme budít pouze do vstupních svorek (zdroj proudu I_{01}) a výstupní svorky mohou být zatíženy zatěžovací impedancí Z_2 . Výstupní proud pak můžeme pokládat za druhý budící zdroj s opačným znaménkem. Vztah (2) lze potom upravit do tvaru

$$u_k = \frac{1}{\Delta}(\Delta_{ak}i_a + \Delta_{bk}i_b) = \frac{\Delta_{ak}}{\Delta}I_{01} - \frac{\Delta_{bk}}{\Delta}I_2. \quad (5)$$

Pro vstupní a výstupní napětí tedy platí

$$u_a = U_1 = \frac{\Delta_{aa}}{\Delta}I_{01} - \frac{\Delta_{ba}}{\Delta}I_2 = \frac{\Delta_{aa}}{\Delta}I_{01} - \frac{\Delta_{ba}}{Z_2\Delta}U_2, \quad (6)$$

$$u_b = U_2 = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta}I_{01} - \frac{\Delta_{bb}}{\Delta}I_2 = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta}I_{01} - \frac{\Delta_{bb}}{Z_2\Delta}U_2 \quad (7)$$

a po úpravě získáme

$$U_2 = \frac{Z_2 \Delta_{ab}}{Z_2 \Delta + \Delta_{bb}} I_1, \quad (8)$$

$$U_1 = \frac{I_1}{\Delta} \frac{Z_2 \Delta \Delta_{aa} + \Delta_{aa} \Delta_{bb} - \Delta_{ab} \Delta_{ba}}{Z_2 \Delta + \Delta_{bb}}.$$

Podle lineární algebry je možné rozdíl součinu jednoduchých subdeterminantů vyjádřit pomocí součinu determinantu soustavy a tzv. dvojitého algebraického doplňku.

$$\Delta_{aa} \Delta_{bb} - \Delta_{ab} \Delta_{ba} = \Delta \Delta_{aa,bb}$$

Pak pro vstupní napětí platí vztah

$$U_1 = \frac{Z_2 \Delta_{aa} + \Delta_{aa,bb}}{Z_2 \Delta + \Delta_{bb}} I_1. \quad (9)$$

Nyní lze odvodit obecný vztah pro vstupní impedanci (při obecné zatěžovací impedanci Z_2) a z něho výraz pro tuto impedanci při výstupu naprázdno ($Z_2 = \infty$) a nakrátko ($Z_2 = 0$).

$$Z_{vst} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{Z_2 \Delta_{aa} + \Delta_{aa,bb}}{Z_2 \Delta + \Delta_{bb}} \quad (10)$$

$$Z_{vst}^p = \frac{U_1}{I_1} \Big|_{Z_2=\infty} = \frac{\Delta_{aa}}{\Delta} \quad (11)$$

$$Z_{vst}^k = \frac{U_1}{I_1} \Big|_{Z_2=0} = \frac{\Delta_{aa,bb}}{\Delta_{bb}} \quad (12)$$

Podobně lze odvodit vztah pro napěťový přenos opět v obecném tvaru a pro výstup naprázdno.

$$A_u = \frac{U_2}{U_1} = \frac{Z_2 \Delta_{ab}}{Z_2 \Delta_{aa} + \Delta_{aa,bb}} \quad (13)$$

$$A_u^p = \frac{U_2}{U_1} \Big|_{Z_2=\infty} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}} \quad (14)$$

Pokud dosadíme do rovnice (8) za výstupní napětí vztah $U_2 = Z_2 I_2$, dostaneme vztah pro proudový přenos v obecném tvaru a po úpravě pro výstup nakrátko.

$$A_i = \frac{I_2}{I_1} = \frac{\Delta_{ab}}{Z_2 \Delta + \Delta_{bb}} \quad (15)$$

$$A_i^k = \frac{I_2}{I_1} \Big|_{Z_2=0} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{bb}} \quad (16)$$

V některých případech používáme veličiny, které představují poměr výstupního napětí ke vstupnímu proudu (tzv. přenosová impedance, resp. transimpedance Z_t), nebo poměr výstupního proudu ke vstupnímu napětí (tzv. přenosová admitance, resp. transadmitance Y_t). Vztah pro transimpedanci dostaneme přímo ze vztahu (8) a další úpravou dostaneme transimpedanci pro výstup naprázdno Z_t^p .

$$Z_t = \frac{U_2}{I_1} = \frac{Z_2 \Delta_{ab}}{Z_2 \Delta + \Delta_{bb}} \quad (17)$$

$$Z_t^p = \frac{U_2}{I_1} \Big|_{Z_2=\infty} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta} \quad (18)$$

Podobně lze odvodit z výrazu (13) po dosazení $U_2 = Z_2 I_2$ vztah pro transadmitanci Y_t a transadmitanci při výstupu nakrátko Y_t^k .

$$Y_t = \frac{I_2}{U_1} = \frac{\Delta_{ab}}{Z_2 \Delta_{aa} + \Delta_{aa,bb}} \quad (19)$$

$$Y_t^k = \frac{I_2}{U_1} \Big|_{Z_2=0} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa,bb}} \quad (20)$$

Výstupní impedanci (vnitřní impedanci náhradního zdroje podle Theveninova teorému) určujeme podobně jako impedanci vstupní, tj. jako poměr výstupního napětí ku výstupnímu proudu. V tom případě je však nutné odpojit zátěž Z_2 (jinak by platilo $Z_2 = \frac{U_2}{I_2}$). V tomto případě budíme do výstupních svorek proudem $I_{02} = -I_2$ a vstup zakončíme ekvivalentní impedancí vstupního budícího zdroje, tj. v obecném případě impedancí Z_1 . Výstupní impedanci pak určíme z rovnic (6) a (7) dosazením vztahu $I_1 = -\frac{U_1}{Z_1}$.

$$Z_{vst} = -\frac{U_2}{I_2} = \frac{Z_1 \Delta_{bb} + \Delta_{aa,bb}}{Z_1 \Delta + \Delta_{aa}} \quad (21)$$

$$Z_{vst}^k = -\frac{U_2}{I_2} \Big|_{Z_1=0} = \frac{\Delta_{aa,bb}}{\Delta_{aa}} \quad (22)$$

$$Z_{vst}^p = -\frac{U_2}{I_2} \Big|_{Z_1=\infty} = \frac{\Delta_{bb}}{\Delta} \quad (23)$$

Vztah pro přenos proudu lze nyní jednoduše ověřit.

$$A_i^k = \frac{\frac{U_2|_{Z_2=\infty}}{Z_{vst}^p}}{I_1} = \frac{\frac{U_2}{I_1} \Big|_{Z_2=\infty}}{\frac{U_2}{I_2} \Big|_{Z_1=\infty}} = \frac{Z_t^p}{Z_{vst}^p} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{bb}}$$

Uvedené parametry a vztahy pro jejich výpočet jsou shrnuty v tabulce 1.

Některé parametry lze počítat i jiným způsobem, což si ukážeme na následujících příkladech.

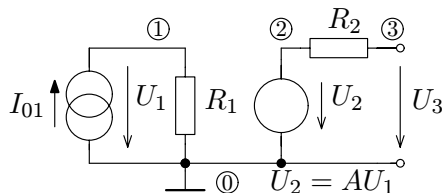
Veličina	Označení	Vzorec
Napěťový přenos	$A_u = \frac{U_2}{U_1}$	$\frac{Z_2 \Delta_{ab}}{Z_2 \Delta_{aa} + \Delta_{aa,bb}}$
Napěťový přenos naprázdno	$A_u^p = \frac{U_2}{U_1} \Big _{Z_2=\infty}$	$\frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}}$
Proudový přenos	$A_i = \frac{I_2}{I_1}$	$\frac{\Delta_{ab}}{Z_2 \Delta + \Delta_{bb}}$
Proudový přenos nakrátko	$A_i^k = \frac{I_2}{I_1} \Big _{Z_2=0}$	$\frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{bb}}$
Vstupní impedance	$Z_{vst} = \frac{U_1}{I_1}$	$\frac{Z_2 \Delta_{aa} + \Delta_{aa,bb}}{Z_2 \Delta + \Delta_{bb}}$
Vstupní impedance naprázdno	$Z_{vst}^p = \frac{U_1}{I_1} \Big _{Z_2=\infty}$	$\frac{\Delta_{aa}}{\Delta}$
Vstupní impedance nakrátko	$Z_{vst}^k = \frac{U_1}{I_1} \Big _{Z_2=0}$	$\frac{\Delta_{aa,bb}}{\Delta_{bb}}$
Výstupní impedance	$Z_{vst} = -\frac{U_2}{I_2}$	$\frac{Z_1 \Delta_{bb} + \Delta_{aa,bb}}{Z_1 \Delta + \Delta_{aa}}$
Výstupní impedance naprázdno	$Z_{vst}^p = -\frac{U_2}{I_2} \Big _{Z_1=\infty}$	$\frac{\Delta_{bb}}{\Delta}$
Výstupní impedance nakrátko	$Z_{vst}^k = -\frac{U_2}{I_2} \Big _{Z_1=0}$	$\frac{\Delta_{aa,bb}}{\Delta_{aa}}$
Přenosová impedance (transimpedance)	$Z_t = \frac{U_2}{I_1}$	$\frac{Z_2 \Delta_{ab}}{Z_2 \Delta + \Delta_{bb}}$
Transimpedance naprázdno	$Z_t^p = \frac{U_2}{I_1} \Big _{Z_2=\infty}$	$\frac{\Delta_{ab}}{\Delta}$
Přenosová admitance (transadmitance)	$Y_t = \frac{I_2}{U_1}$	$\frac{\Delta_{ab}}{Z_2 \Delta_{aa} + \Delta_{aa,bb}}$
Transadmitance nakrátko	$Y_t^k = \frac{I_2}{U_1} \Big _{Z_2=0}$	$\frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa,bb}}$

Tabulka 1: Vyjádření charakteristických parametrů dvojbranu pomocí determinantu a algebraických doplňků admitanční matice soustavy

Příklady použití

Příklad 1

Použití některých z uvedených pravidel nejdříve ukážeme na elementárním příkladě, kde lze výsledky přímo ověřit.



U_1	U_2	U_3	
G_1	0	0	I_{01}
A	-1	0	0
0	$-G_2$	G_2	I_{03}

Na obrázku je elementární schéma zesilovače se zdrojem napětí řízeným napětím a kompletní matice dané soustavy. Jejím roznásobením si může čtenář snadno ověřit správnost sestavení obvodových rovnic (I_{03} představuje možné buzení i do uzlu 3).

Pokud však budeme budit pouze do uzlu 1, jak ukazuje obrázek ($I_{03} = 0$) a výstup budeme uvažovat v uzlu 3, lze pro výpočet parametrů obvodu použít vztahů uvedených v tabulce 1, odvozených pro zapojení obecného dvojbranu.

Napěťový přenos naprázdno	$A_u^p = \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{11}} = A$
Proudový přenos nakrátko	$A_i^k = \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{33}} = \frac{AR_1}{R_2}$
Vstupní impedance	$Z_{vst}^p = Z_{vst}^k = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = \frac{\Delta_{11,33}}{\Delta_{33}} = R_1$
Výstupní impedance	$Z_{vst}^p = Z_{vst}^k = \frac{\Delta_{33}}{\Delta} = \frac{\Delta_{11,33}}{\Delta_{11}} = R_2$
Transimpedance naprázdno	$Z_t^p = \frac{\Delta_{13}}{\Delta} = AR_1$
Transadmitance nakrátko	$Y_t^k = \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{11,33}} = \frac{A}{R_2}$

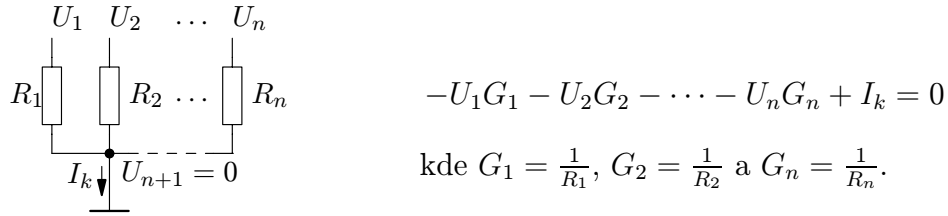
Jak již bylo řečeno, lze některé parametry počítat jiným způsobem, což může být někdy výhodné. Výstupní zkratový proud v parametrech „nakrátko“ lze vypočítat bez použití dvojitých doplňků, jak vyplývá z následujícího popisu.

Obrázek 2 uvádí obecný případ, kdy je zkratován uzel $n + 1$ a máme určit zkratový proud I_k . Jelikož je nyní napětí U_{n+1} nulové musíme nulovat sloupec matice soustavy odpovídající tomuto napětí. Pokud bychom nepožadovali výpočet další proměnné (I_k), vypustili bychom tento sloupec i řádek odpovídající tomuto uzlu. Nyní však napětí U_{n+1} ve vektoru proměnných zaměníme proudem I_k a ve vektoru budících proudů je nutné zapsat na místě budícího proudu $I_{0(n+1)}$ nulu, jelikož již nelze budit do tohoto uzlu (nyní referenční uzel). V řádku odpovídajícímu uzlu $n + 1$ jsou však nyní vodivosti, které udávaly vztah mezi jednotlivými proudy větví tekoucích z uzlu $n + 1$ a napětími $U_{n+1} - U_1$, $U_{n+1} - U_2$, ..., $U_{n+1} - U_n$. Řádek, resp. celá rovnice uzlu $n + 1$ by měla před úpravou tento tvar

$$-U_1G_1 - U_2G_2 - \dots - U_nG_n + U_{n+1}(G_1 + G_2 + \dots + G_n) = I_{0(n+1)}.$$

Po dosud provedené úpravě by se tato rovnice změnila na tento tvar $-U_1G_1 - U_2G_2 - \dots - U_nG_n + I_k \cdot 0 = 0$, což však neodpovídá skutečnosti. Musíme tedy provést poslední

úpravu, tj. na místě proměnné proudu I_k zaměnit nulu za jedničku. Tím se uvedený nulový sloupec stává nenulovým a dostáváme vztah uvedený v obrázku 2, který je již platný a podle něhož lze určit zkratový proud I_k .



Obrázek 2: Zapojení pro výpočet zkratového proudu

Nyní aplikujme uvedený postup na náš příklad: nejprve vynulujeme sloupec odpovídající zkratovanému uzlu – v našem případě je to uzel výstupní, tj. třetí. Potom zaměňme proměnnou tohoto uzlu (U_3) za zkratový proud (I_3) a na místě původního uzlu (3. řádek) změňme 0 na 1. Jelikož již nelze do tohoto (již neexistujícího) uzlu budít, musí být na odpovídajícím místě (3. pozice) nula ve vektoru budících proudů. Výsledná matice soustavy se všemi odpovídajícími obvodovými veličinami je tedy po uvedených úpravách v následujícím tvaru.

U_1	U_2	I_3	
G_1	0	0	I_{01}
A	-1	0	0
0	$-G_2$	1	0

Z dostupných obvodových veličin lze pak určit následující parametry, které po dosazení musí samozřejmě souhlasit s již vypočtenými vztahy.

$$A_i^k = \frac{\Delta_{13}}{\Delta}, \quad Y_t^k = \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{11}}$$

Výstupní impedanci nakrátko lze vypočítat z jiné úpravy matice. Jelikož je v tomto případě zkratován první uzel (připojen na referenční napětí) můžeme první řádek a první sloupec vyškrtnout (přičíst k referenčnímu a vypustit). Po této úpravě obdržíme:

U_2	U_3	
-1	0	0
$-G_2$	1	I_{03}

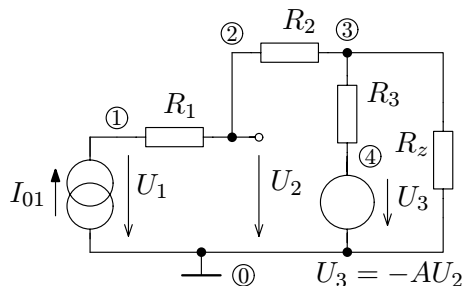
Výstupní impedance je pak dána vztahem

$$Z_{vst}^k = \frac{U_3}{I_{03}} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta} = R_2$$

Stejným způsobem lze dospět i ke vztahu pro vstupní impedanci nakrátko Z_{vst}^k . Výsledky musí opět souhlasit.

Příklad 2

Nyní si ukážeme výpočet napěťového přenosu zesilovače v invertujícím zapojení s výstupním odporem R_3 . Zesilovač je zatížený odporem R_z , který v tomto případě zahrneme přímo do matice soustavy. Vektor budících proudů je v maticovém úplný, nicméně v dále budeme předpokládat buzení pouze do uzlu 1, tak jak je uvedeno na obrázku, tj. $I_{02} = 0$ i $I_{03} = 0$.



U_1	U_2	U_3	U_4	
G_1	$-G_1$	0	0	I_{01}
$-G_1$	$G_1 + G_2$	$-G_2$	0	I_{02}
0	$-G_2$	$G_2 + G_3 + G_z$	$-G_3$	I_{03}
0	$-A$	0	-1	0

Při buzení pouze do prvního uzlu (podle obrázku), dostane pro napěťový přenos následující vztah

$$\begin{aligned}
 A_u &= \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{11}} = \frac{G_1(G_2 - G_3A)}{+G_1G_2 + G_1G_3 + G_1G_z + G_2G_3 + G_2G_z + AG_2G_3} = \\
 &= \frac{\frac{R_3}{R_2} - A}{\frac{R_3}{R_2} + 1 + \frac{R_3}{R_z} + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1R_3}{R_2R_z} + \frac{AR_1}{R_2}}. \quad (24)
 \end{aligned}$$

V tomto případě je dále vhodné určit vztah, resp. vztahy pro výstupní odpor. Pro jeho velikost při buzení proudovým zdrojem podle obrázku nebo napěťovým zdrojem (naprázdno nebo nakrátko) platí následující vztahy:

$$\begin{aligned}
 Z_{ust}^p &= \frac{\Delta_{33}}{\Delta} = \frac{R_3}{1 + A} \\
 Z_{ust}^k &= \frac{\Delta_{11,33}}{\Delta_{11}} = \frac{(R_1 + R_2)R_3}{R_1 + R_2 + R_3 + AR_1},
 \end{aligned}$$

kde $R_1 = \frac{1}{G_1}$, $R_2 = \frac{1}{G_2}$ a $R_3 = \frac{1}{G_3}$.

Z těchto vztahů je zřejmé, že typ buzení má vliv na vlastnosti obvodu. Napěťový přenos se sice neliší, ale výstupní odpor ano. Je to dáno tím, že se podstatně mění zpětnovazební přenos β . V případě napěťového buzení je pro $R_3 = 0$ jeho velikost rovna $\beta = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$, zatímco pro proudové buzení je $\beta = 1$! To že typ buzení může mít zásadní vliv na vlastnosti soustavy¹ si ukážeme ještě v další kapitole.

Vraťme se nyní k napěťovému přenosu. Jeho vztah je vždy, z principu výpočtu, nezávislý na typu buzení a je určen vždy tak, jako by byl na vstup připojen budící zdroj napětí. Pokud tuto skutečnost chceme explicitně vyjádřit i v maticovém zápisu, upravíme matici soustavy následovně: *vynulujeme řádek odpovídající budícímu uzlu mimo sloupce*

¹jmenovitě na její stabilitu

odpovídajícímu budícímu zdroji, kde dáme jedničku. V našem případě (buzení v uzlu 1) dostaneme:

U_1	U_2	U_3	U_4	
1	0	0	0	U_1
$-G_1$	$G_1 + G_2$	$-G_2$	0	0
0	$-G_2$	$G_2 + G_3 + G_z$	$-G_3$	0
0	$-A$	0	-1	0

V tomto případě je obvod skutečně buzen z napěťového zdroje (první řádek soustavy má podle výše uvedeného maticového zápisu podobu $U_1 = U_1$). Napěťový přenos nyní určíme z následujícího vztahu. Po dosazení a následné úpravě musíme dostat samozřejmě stejný vztah, jako v předchozím případě.

$$U_3 = \frac{\Delta_{13}}{\Delta} U_1, \quad \text{resp.} \quad A_u = \frac{\Delta_{13}}{\Delta}$$

Z výše uvedené matice a z těchto vztahů je evidentní, že v tomto případě bude výpočet přenosu výpočetně méně náročný, a tudíž vhodný pro implementaci v počítačových programech.

Upravme ještě výsledný vztah (24) pro napěťový přenos. Pokud vezmeme v úvahu následující nerovnosti $R_3 \ll R_2$, $R_3 \ll R_z$ a $A \gg 1$, pak můžeme psát

$$A_u = \frac{-A}{1 + \frac{AR_1}{R_2}}$$

a následně

$$\lim_{A \rightarrow \infty} A_u = -\frac{R_2}{R_1},$$

kdy

$$\lim_{A \rightarrow \infty} U_2 = \lim_{A \rightarrow \infty} I_{01} \frac{\Delta_{12}}{\Delta} = 0.$$

To už však odpovídá ideálnímu operačnímu zesilovači. Zařadíme-li tedy místo řízeného zdroje napětí přímo ideální OZ, musíme dostat identické výsledky. Matice soustavy s ideálním OZ bude ve tvaru:

U_1	U_3	U_4	
G_1	0	0	I_{01}
$-G_1$	$-G_2$	0	0
0	$G_2 + G_3 + G_z$	$-G_3$	0

Odsud dostaneme pro napěťový přenos výraz

$$A_u = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}} = -\frac{R_2}{R_1}.$$

Zde není rozlišen invertující a neinvertující vstup (znaménko zesílení A). Analýza tohoto typu platí pouze v případě správně zavedené záporné zpětné vazby stabilního systému.

V tomto příkladě bychom pro výpočet mohli použít také skutečnou admitanční matici soustavy. Řízený zdroj napětí U_3 s vnitřním odporem R_3 můžeme totiž nahradit zdrojem proudu řízeným napětím $I = G_m U_2$ s orientací shodnou s orientací dosavadního napěťového zdroje (od uzlu 3 do uzlu 0) paralelně spojeným s vnitřním odporem se stejnou velikostí R_3 . Soustava má potom pouze tři uzly a výstupním uzlem je opět uzel 3.

U_1	U_2	U_3	
G_1	$-G_1$	0	I_{01}
$-G_1$	$G_1 + G_2$	$-G_2$	0
0	$-G_2 + G_m$	$G_2 + G_3 + G_z$	0

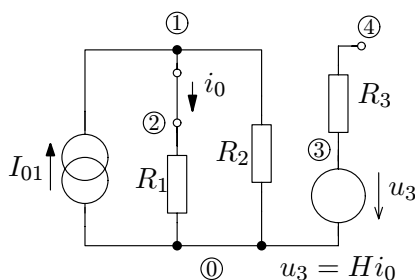
Podle Theveninova teorému platí pro napětí U_3 naprázdno $U_3^p = -G_m U_2 R_3 = -A U_2$. Z toho $G_m = \frac{A}{R_3}$. Pokud provedeme toto zpětné přiřazení, tak obdrženy výsledek musí být samozřejmě identický:

$$A_u = \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{11}} = \frac{R_3 - A R_2}{R_3 + R_2 + G_z R_2 R_3 + R_1 + G_z R_1 R_3 + A R_1}$$

Pozn.: Pokud bychom na vstup nezapojili odpor R_1 , vyjde první řádek matice soustavy nulový a tudíž je nulový i determinant. Je samozřejmé, že při buzení zdrojem proudu, by napětí na tomto zdroji rostlo nade všechny meze a příklad tím pádem nemá reálný základ. To je také zřejmé při výpočtu parametrů, v nichž se determinant využívá (Z_{vst}^p, Z_t^p, \dots). Právě v případě napěťového přenosu však vyjde výsledek správně. Jak bylo výše uvedeno, při výpočtu napěťového přenosu se v podstatě vždy jedná o případ napěťového buzení. Matematicky dostaneme správný výsledek, jelikož se jedná o podíl nenulových subdeterminantů.

Příklad 3

Na závěr uvedeme ještě jeden jednoduchý příklad s ukázkou výpočtu řídicího proudu zdroje a zkratového proudu.



i_0	u_2	u_3	u_4	
1	G_2	0	0	I_{01}
-1	G_1	0	0	I_{02}
$-H$	0	1	0	0
0	0	$-G_3$	G_3	I_{04}

Na obrázku je schéma zdroje napětí řízeného proudem i_0 a kompletní matice soustavy se všemi obvodovými veličinami i možnými budícími proudy. Opět se jedná o velmi jednoduchý příklad, kde lze pro kontrolu všechny dále uvedené výpočty provést „ručně“ přímo ze schématu.

Pomocí výše odvozených výrazů lze pro buzení do uzlu 1 ($I_{02} = 0, I_{03} = 0$) vypočítat následující parametry:

$$\begin{aligned}
A_u^p &= \frac{\Delta_{14}}{\Delta_{22}} = \frac{\Delta_{24}}{\Delta_{22}} = \frac{H}{R_1} && \text{napěťový přenos naprázdno} \\
Z_{vst}^p &= \frac{\Delta_{22}}{\Delta} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} && \text{vstupní odpor naprázdno} \\
Z_{vst}^k &= \frac{\Delta_{22,44}}{\Delta_{44}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} && \text{vstupní odpor nakrátko} \\
i_0 &= I_{01} \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = I_{01} \frac{R_2}{R_1 + R_2} && \text{řídící proud} \\
A_i^k &= \frac{\Delta_{14}}{\Delta_{44}} = H \frac{R_2}{R_3(R_1 + R_2)} && \text{proudové zesílení nakrátko} \\
Z_t^p &= \frac{\Delta_{14}}{\Delta} = H \frac{R_2}{R_1 + R_2} && \text{transimpedance naprázdno} \\
Y_t^k &= \frac{\Delta_{14}}{\Delta_{22,44}} = \frac{H}{R_3 R_1} && \text{transadmitance nakrátko}
\end{aligned}$$

kde i_4 je zkratový proud při výstupu (uzel 4) nakrátko. Dále si je třeba uvědomit, že redukcí matice ztrácíme proměnnou u_1 . Vstupní napětí je ale také napětí u_2 , takže ho lze vypočítat, ale na jiné (druhé) pozici ve vektoru neznámých. Na první pozici je nyní řídící proud i_0 . Budit lze ovšem jak do uzlu 1 tak i do uzlu 2, což je v tomto případě identické. Ztratili jsme možnost přímého buzení pouze do uzlu 3, což však ztrácí, vzhledem k zapojení, smysl. V našem případě budíme pouze do prvního uzlu a tudíž $I_{02} = I_{04} = 0$.

Jak již bylo ukázáno, výstup nakrátko lze také realizovat tak, že v původní matici vynulujeme čtvrtý sloupec a dále prvek 4,4 položíme roven jedné (počítáme proud uzlem 4). Přenosovou admitanci lze z upravené matice vypočítat následovně:

i_0	u_2	u_3	i_4	
1	G_2	0	0	I_{01}
-1	G_1	0	0	0
-H	0	1	0	0
0	0	- G_3	1	0

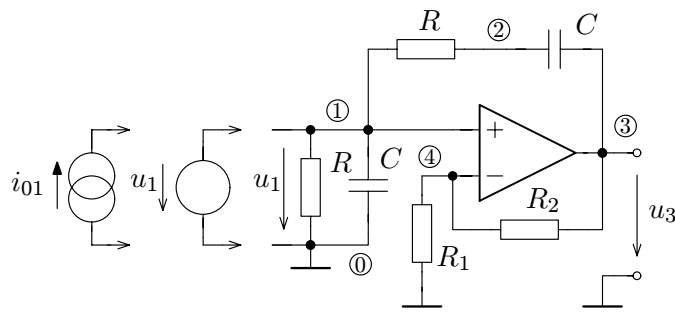
$$Y_t^k = \left. \frac{i_4}{u_1} \right|_{u_4=0} = \frac{\Delta_{14}}{\Delta_{22}}.$$

Stabilita soustavy v závislosti na typu buzení

Jak již bylo uvedeno ve druhém příkladě, typ buzení může mít zcela zásadní vliv na vlastnosti obvodu. Nyní si to ověříme na velmi jednoduchém příkladě.

Na následujícím obrázku je schéma zpětnovazebního oscilátoru s ideálním OZ a s Wienovým členem ve smyčce kladné ZV.

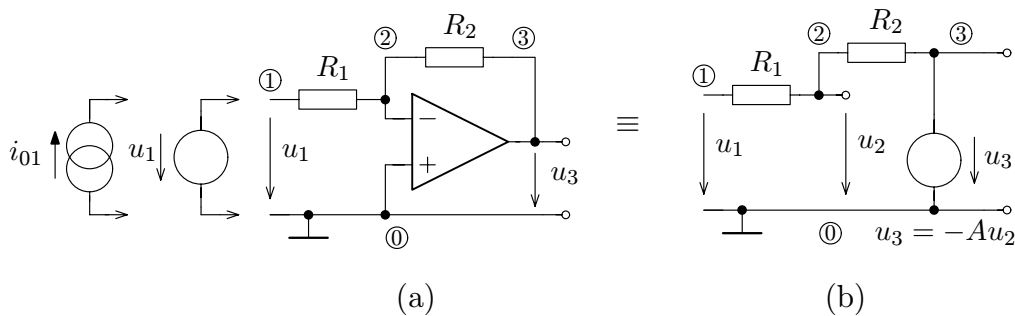
Pokud tento obvod nebudeme budit (nebude připojen budící zdroj), přičemž bude platit $R_2 = 2R_1$, bude obvod právě na mezi stability. To si můžeme ověřit analýzou otevřené ZV smyčky. Pokud bychom však obvod budili zdrojem napětí do uzlu 1 tak, jak je naznačeno na obrázku, dostaneme pro napěťový přenos vztah $A_u = 1 + R_2/R_1 = 3$. Je to pochopitelné, pokud si uvědomíme, že připojením napěťového zdroje jsme zrušili vliv kladné zpětné vazby, daný Wienovým členem. Pokud totiž bude napětí budícího zdroje nulové je neinvertující vstup OZ uzemněn. Pokud napětí zdroje nebude nulové, bude toto napětí také napětím neinvertujícího vstupu. V každém případě nebude napětí tohoto vstupu určeno výstupním napětím OZ, ale pouze budícím zdrojem.



Obrázek 3: Můstkový oscilátor s Wienovým členem

Pokud budeme obvod budit zdrojem proudu, bude situace diametrálně odlišná. Pokud bude proud budícího zdroje nulový, nemá žádný vliv (rozpojený obvod) a obvod je na mezi stability (kmitá netlumenými kmity). Pokud bude budící proud nenulový, bude se navíc k signálu vlastních oscilací superponovat složka daná budícím zdrojem.²

V praxi se však často setkáváme jiným s typem obvodů. Takovým, který ilustruje obrázek 4. Jedná se o klasický invertující zesilovač, jehož model je na obrázku (b).



Obrázek 4: Invertující zesilovač (a) a jeho model (b)

Vlastní zesilovač je modelován prostým zdrojem napětí (u_3) řízeným napětím (u_2). Převodní konstanta (zesílení) je označena A . Záporné znaménko ve vztahu $u_3 = -Au_2$ udává zápornou ZV celkového zapojení. Pokud bude zesílení A kmitočtově závislé a bude vykazovat minimálně tři póly, můžeme zavedením příliš silné ZZV způsobit nestabilitu celé soustavy. Jak víme z druhého příkladu, ...

Závěr

Uvedená metoda umožňuje popsat všechny typy řízených zdrojů i dalších neregulárních prvků, přičemž se řád výsledné matice zvýší o jedničku pouze pro zdroj řízený proudem (přídavná proměnná, kterou lze přímo vypočítat je řídicí proud). Pro zdroje řízené napětím zůstává řád matice nezměněn. Z tohoto pohledu je proto výhodná pro počítačovou analýzu, kdy by se pro složitější obvody mohl příliš zvyšovat řád matice.

Reference

- [1] Sigorskij V. P.: *Riešenie elektrónkových a tranzistorových obvodov*, slovenský překlad SNTL Praha, 1963

²To pouze v případě, že kmitočet buzení je odlišný od kmitočtu vlastních kmitů. Pokud by tyto kmitočty byly shodné, není řešení takového obvodu triviální.

[2] Mann H.: *Modifikovaná metoda uzlových napětí*, Slaboproudý obzor, No. 4, 1980