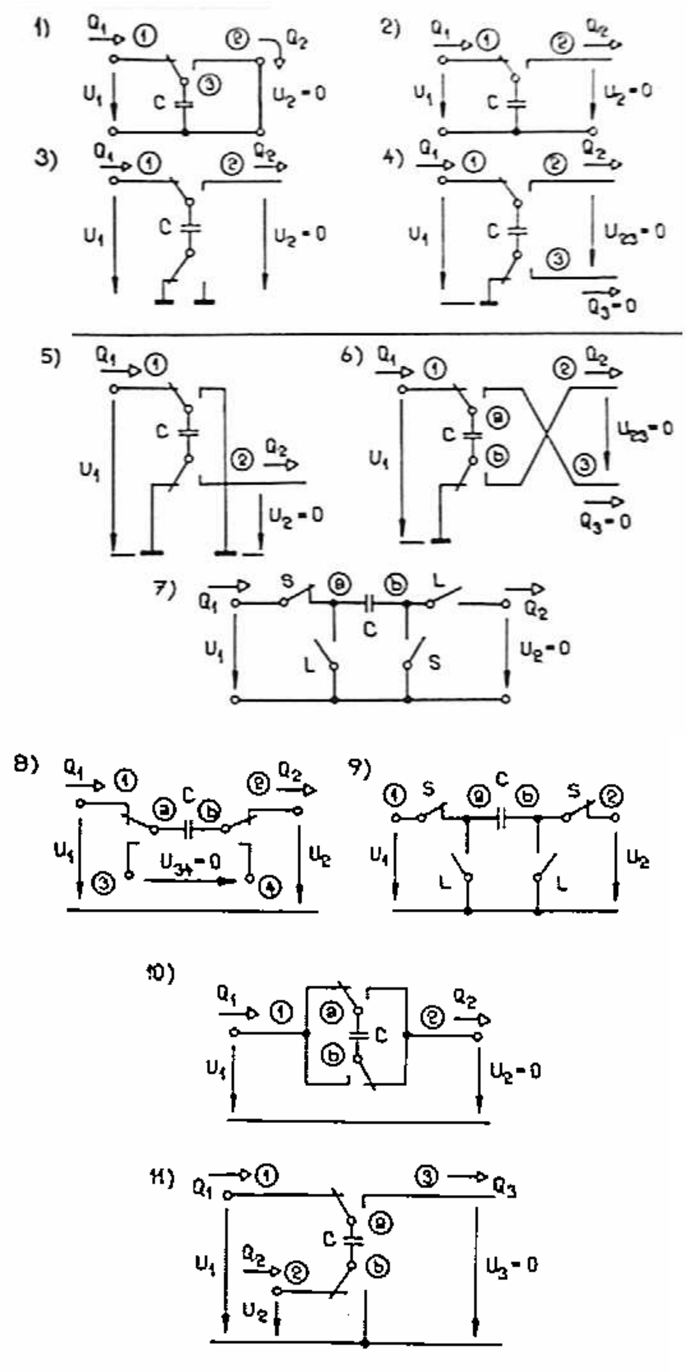
Soustavy se spínanými kapacitory - SC

1. Základní princip:

Simulace rezistoru přepínaným kapacitorem → viz známý obrázek! (a rovnice)
Modifikace základního spínaného obvodu:



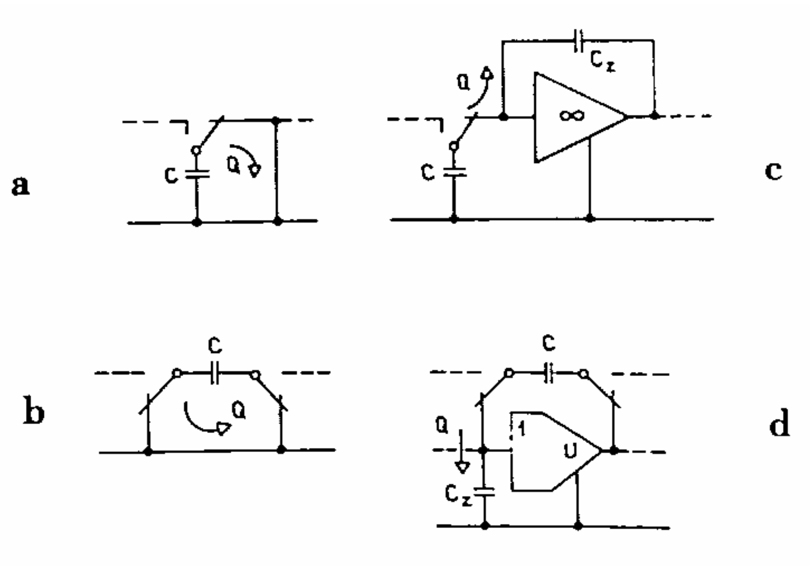
Obr. 2.1: Zapojení a pracovní režimy přepínaného kapacitoru

Vlastnosti jednotlivých zapojení: → ***komentář!***

Z hlediska funkce obvodu i jeho dalších vlastností je důležité, jakým způsobem konkrétní spínaný kapacitor "zachází" s nábojem a jak jej předává dál:

<u>*Varianty:*</u>

a) plné vybití kapacitoru do zkratu – náboj odpovídá "plnému" uzlovému napětí, je vybíjen v "hlavním" obvodu.
b) plné vybití kapacitoru do zkratu – náboj odpovídá diferenci dvou uzlových napětí a je vybíjen mimo "hlavní" obvod.
c) náboj je plně předán do jiného kapacitoru v "hlavním" obvodu.
d) náboj je částečně předán do jiného kapacitoru, zbytek náboje zůstává v původním kapacitoru (částečné vybití kapacitoru).



Obr 2.2: Příklady aplikací předchozích zapojení

⇒ ***Porovnej s předchozími obrázky!***

2. Obvodový popis v časové oblasti:

Popis na základě diferenčních rovnic, sestavovaných
- heuristicky,
- systematicky,

  na základě metody uzlových napětí.

Základní forma diferenčních rovnic vychází z diferenciální rovnice pro proud kapacitorem:

$$i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} \xrightarrow{\text{úprava}} i_C(t).dt = C.du_C(t)$$

$$\textit{diskretizace} > \qquad i_C(t).\Delta t = C.\Delta u_C(t)$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta q(t) = C.\Delta u_C(t)$$

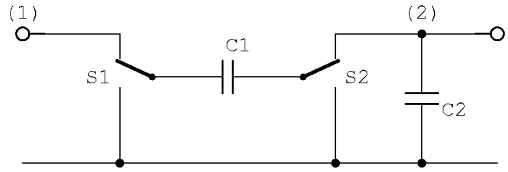
po zobecnění a podle zákona o zachování náboje je možno pro *i*-tou fázi sestavit sadu obvodových rovnic ve tvaru

$$\Delta q_{(i)} = \underline{C}_{(i)} \times \Delta u_{(i)} \qquad i=1,2,\dots,n$$

změna náboje je dána
- změnou ("přelitím") nábojů kapacitorů mezi dvěma fázemi – změna uvnitř obvodu,
- příspěvkem z vnějších zdrojů.

⇒ ***jde o řešení formou uzlových nábojových rovnic!***

<u>Př.:</u> RC článek SC



pro uzel (2) platí:

$$\Delta q_{C1} + \Delta q_{C2} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1\left[u_1(n) - u_2(n)\right] - q_{C1}(n - 1/2) - \left[C_2 u_2(n) - C_2 u_2(n-1)\right] = 0\,,$$

$$C_1 u_1(n) = u_2(n)(C_1 + C_2) - C_2 u_2(n-1)$$

systematický popis metodou uzlových nábojových rovnic vychází ze sestavení kapacitní matice soustavy pro každou fázi a postupné řešení těchto rovnic při respektování počátečních podmínek, odpovídajících poměrům v obvodu na konci předchozí fáze.

Systematické sestavení rovnic pro analýzu v časové oblasti
(článek Elektrorevue 2001, http://www.elektrorevue.cz/clanky/01050/index.html)

2.1 ODVOZENÍ NÁBOJOVÉHO POPISU

V následující části jsou nejdříve uvažovány idealizované obvody s budicím signálem se schodovitým časovým průběhem, tedy s konstantní hodnotou během fáze. Zákon zachování elektrického náboje pro daný uzel *j* a danou fázi *i* lze popsat vztahem

$$\sum_{v=1}^{l} \Delta q_v^{(i,j)} = 0\,, \tag{2}$$

kde *l* je počet větví připojených k uzlu *j* a $\Delta q_v^{(i,j)}$ je náboj vstupující do uzlu *j* přes větev *v* ve fázi *i*.

Nábojové příspěvky ve vztahu (2) si vyjádříme, jako součet příspěvků od zdrojů náboje $q_{CS}^{(i)}$ (CS = Charge Sources) a změn náboje na kapacitorech obvodu vzhledem k předchozí fázi $q_C^{(i)}$ $q_C^{(i-1)}$. Pak pro celý obvod a danou fázi i můžeme vztah (2) upravit a dále přepsat do maticového tvaru, čímž dostaneme rovnici

$$\mathbf{q}_{CS}^{(i)} = \mathbf{q}_C^{(i)} - \mathbf{q}_C^{(i-1)}. \tag{3}$$

Mezi metody popisu idealizovaných obvodů SC, které jsou nejčastěji používány, patří

- **metoda redukce obvodové matice transformacemi se sloupci a řádky,**
- **modifikovaná metoda uzlových napětí aplikovaná na nábojový popis, neboli metoda razítek,**
- **smíšená metoda,**
- **metoda zachování rozměrů obvodové matice,**
- **metoda incidenčních matic.**

2.1.1 Metoda redukce obvodové matice transformacemi se sloupci a řádky

Princip metody spočívá v redukci popisu obvodu pomocí transformačních vztahů postihujících vliv spínačů, neregulárních aktivních prvků a zdrojů napětí. Nechť $\mathbf{C}^*$ je zkrácená kapacitní matice (bez vztažného uzlu) analyzovaného idealizovaného N-fázového obvodu SC bez uvažování vlivu spínačů, zdrojů a neregulárních prvků. Cílem je odstranění závislých napětí a redukce neznámých nábojů zapříčiněných přítomností neregulárních prvků a budicích zdrojů a tím zajištění regularity matice obvodu (řešitelnosti soustavy rovnic). To realizujeme transformacemi původních nábojových rovnic pomocí operací s řádky a sloupci, kde sloupce odpovídají uzlovým napětím a řádky nábojům daného uzlu.

- **Operace se sloupci:**

Sloupec v obvodové matici se vztahuje k určitému uzlovému napětí. Je-li tedy uzlové napětí uzlu *m* obvodu závislé na ostatních, lze ho v lineárních obvodech vyjádřit lineární kombinací nezávislých uzlových napětí a zdrojů napětí. Tento závislý uzel můžeme redukovat tak, že podle vztahu závislosti postupně sloupec obvodové matice *m* násobíme koeficienty vyjadřující závislost na ostatních napětích a výsledek přičítáme ke sloupcům odpovídajícím daným nezávislým napětím. Pak sloupec *m* vypustíme. Transformaci se sloupci můžeme vyjádřit vynásobením původní kapacitní matice $\mathbf{C}^{*}$ transformační maticí $\mathbf{T}_C$

$$\tilde{\mathbf{C}}^{(i)} = \mathbf{C}^{*}\mathbf{T}_C^{(i)}. \tag{4}$$

Označení (*i*) představuje fázi, neboť obvody SC mají tuto transformační matici v každé fázi jinou. Matice $\mathbf{T}_C^{(i)}$ je transformační matice sloupců a slučuje závislá uzlová napětí s nezávislým uzlovým napětím s daným koeficientem.

- **Operace s řádky:**

Operace s řádky představuje eliminaci náboje *q*, který vtéká do prvku z uzlu *x* a vynásobený určitým koeficientem *b* z neregulárního prvku vytéká do uzlu *y*. Eliminace náboje *q* spočívá ve vynásobení řádku *x* koeficientem *b* a sečtením s řádkem *y* nebo vynásobení řádku *y* koeficientem 1/*b* a sečtením s řádkem *x*. Tím dojde k nábojovému sloučení uzlů *x* a *y*, kdy nábojové poměry obou uzlů jsou popsány jedinou rovnicí.

Transformaci s řádky vyjádříme vynásobením původní kapacitní matice $\mathbf{C}^{*}$ transformační maticí $\mathbf{T}_R$ podle vztahu

$$\tilde{\mathbf{C}}^{(i)} = \mathbf{T}_R^{(i)}\mathbf{C}^{*}. \tag{5}$$

I matice $\mathbf{T}_R^{(i)}$ závisí na fázi obvodu SC.

Obě transformace lze shrnout do jediného vztahu

$$\mathbf{C}^{(ii)} = \mathbf{T}_R^{(i)}\mathbf{C}^{*}\mathbf{T}_C^{(i)}, \tag{6}$$

který vyjadřuje úplný zápis transformace matice $\mathbf{C}^{*}$ pro danou fázi *i*.

Dalším úkolem je vyjádřit vliv budicích zdrojů napětí. Vliv všech zdrojů napětí v obvodu, na které se aplikuje metoda redukce, lze postihnout další transformační maticí, kterou si označíme $\mathbf{T}_{Vs}^{(i)}$. Tato matice vyjadřuje napěťový posun vlivem zdrojů napětí a neregulárních prvků, které se nacházejí mezi transformovaným uzlem a uzlem, na který se transformovaný uzel transformuje. Tato matice spolu s kapacitní maticí a transformačními maticemi převádí zdroje napětí na zdroje náboje a spolu s maticí $\mathbf{T}_C$ určuje vztah mezi transformovanými (označené hvězdičkou v horním indexu) a původními uzlovými napětími (bez označení) a zdroji napětí

$$\mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{T}_C^{(i)}\mathbf{u}^{(i)*} + \mathbf{T}_{Vs}^{(i)}\mathbf{u}_S^{(i)}. \tag{7}$$

Při odvození vztahů pro výpočet hodnot časových průběhů napětí vyjdeme ze zákona zachování náboje pro fázi i v celém obvodu obsahujícím pouze kapacitory a transformační prvky a zdroje napětí,

$$\Delta\mathbf{q}^{(i)} = \mathbf{0}. \tag{8}$$

Dále použijeme vztah (3) a náboje na kapacitorech vyjádříme jako součin jejich kapacity a napětí, čímž se předchozí vztah změní na

$$\Delta\mathbf{q}^{(i)} = \mathbf{C}^{*}\Delta\mathbf{u}^{(i)} - \mathbf{q}_{\mathrm{CS}}^{(i)} = \mathbf{C}^{*}\left(\mathbf{u}^{(i)} - \mathbf{u}^{(i-1)}\right) - \mathbf{q}_{\mathrm{CS}}^{(i)} = \mathbf{0}, \tag{9}$$

kde $\mathbf{C}^{*}$ je zkrácená neredukovaná kapacitní matice. Napěťový rozdíl $\Delta\mathbf{u}^{(i)}$ je napěťová změna mezi uzlovými napětími v aktuální a předchozí fázi. Vektor $\mathbf{q}_{\mathrm{CS}}^{(i)}$ je vektor zdrojů náboje ve fázi *i*. Ten bývá většinou v průběhu transformace vynulován.

Na základě výše uvedených transformačních vztahů pro sloupce, řádky a budicí zdroje si sestavíme transformační matice $\mathbf{T}_{\mathrm{C}}^{(i)}$, $\mathbf{T}_{\mathrm{R}}^{(i)}$ a $\mathbf{T}_{\mathrm{Vs}}^{(i)}$. Transformační vztah zapíšeme jako

$$\Delta\mathbf{q}^{(i)*} = \mathbf{T}_{\mathrm{R}}^{(i)}\Delta\mathbf{q}^{(i)}, \tag{10}$$

Předchozí vztahy aplikujeme do rovnice (9) a po úpravách dostaneme:

$$\mathbf{T}_{\mathrm{R}}^{(i)}\mathbf{C}^{*}\left\{\mathbf{T}_{\mathrm{C}}^{(i)}\mathbf{u}^{(i)*} + \mathbf{T}_{\mathrm{Vs}}^{(i)}\mathbf{u}_{\mathrm{S}}^{(i)} - \mathbf{T}_{\mathrm{C}}^{(i-1)}\mathbf{u}^{(i-1)*} - \mathbf{T}_{\mathrm{Vs}}^{(i-1)}\mathbf{u}_{\mathrm{S}}^{(i-1)}\right\} - \mathbf{T}_{\mathrm{R}}^{(i)}\mathbf{q}_{\mathrm{CS}}^{(i)} = \mathbf{0},$$

$$\begin{aligned}&\mathbf{T}_{\mathrm{R}}^{(i)}\mathbf{C}^{*}\mathbf{T}_{\mathrm{Vs}}^{(i-1)}\mathbf{u}_{\mathrm{S}}^{(i-1)} - \mathbf{T}_{\mathrm{R}}^{(i)}\mathbf{C}^{*}\mathbf{T}_{\mathrm{Vs}}^{(i)}\mathbf{u}_{\mathrm{S}}^{(i)} + \mathbf{T}_{\mathrm{R}}^{(i)}\mathbf{q}_{\mathrm{CS}}^{(i)} = \\ &= \mathbf{T}_{\mathrm{R}}^{(i)}\mathbf{C}^{*}\mathbf{T}_{\mathrm{C}}^{(i)}\mathbf{u}^{(i)*} - \mathbf{T}_{\mathrm{R}}^{(i)}\mathbf{C}^{*}\mathbf{T}_{\mathrm{C}}^{(i-1)}\mathbf{u}^{(i-1)*}.\end{aligned} \tag{11}$$

Vyjádříme si $\mathbf{u}^{(i)*}$

$$\mathbf{u}^{(i)*} = \left(\mathbf{T}_{\mathrm{R}}^{(i)}\mathbf{C}^{*}\mathbf{T}_{\mathrm{C}}^{(i)}\right)^{-1}\mathbf{T}_{\mathrm{R}}^{(i)}\left\{\mathbf{C}^{*}\left[\mathbf{T}_{\mathrm{C}}^{(i-1)}\mathbf{u}^{(i-1)*} + \mathbf{T}_{\mathrm{Vs}}^{(i-1)}\mathbf{u}_{\mathrm{S}}^{(i-1)} - \mathbf{T}_{\mathrm{Vs}}^{(i)}\mathbf{u}_{\mathrm{S}}^{(i)}\right] - \mathbf{q}_{\mathrm{CS}}^{(i)}\right\}, \tag{12}$$

a vypočteme $\mathbf{u}^{(i)}$ podle vztahu (7)

$$\mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{T}_{\mathrm{C}}^{(i)}\mathbf{u}^{(i)*} + \mathbf{T}_{\mathrm{Vs}}^{(i)}\mathbf{u}_{\mathrm{S}}^{(i)} = \mathbf{M}^{(i)}\mathbf{u}^{(i-1)} + \mathbf{N}_{\mathrm{S}}^{(i)}\mathbf{u}_{\mathrm{S}}^{(i)} - \mathbf{D}_{\mathrm{CS}}^{(i)}\mathbf{q}_{\mathrm{CS}}^{(i)}, \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{M}^{(i)} &= \mathbf{T}_{\mathrm{C}}^{(i)}\left(\mathbf{T}_{\mathrm{R}}^{(i)}\mathbf{C}^{*}\mathbf{T}_{\mathrm{C}}^{(i)}\right)^{-1}\mathbf{T}_{\mathrm{R}}^{(i)}\mathbf{C}^{*}, \\ \mathbf{N}_{\mathrm{S}}^{(i)} &= \left[\mathbf{E} - \mathbf{T}_{\mathrm{C}}^{(i)}\left(\mathbf{T}_{\mathrm{R}}^{(i)}\mathbf{C}^{*}\mathbf{T}_{\mathrm{C}}^{(i)}\right)^{-1}\mathbf{T}_{\mathrm{R}}^{(i)}\mathbf{C}^{*}\right]\mathbf{T}_{\mathrm{Vs}}^{(i)}, \\ \mathbf{D}_{\mathrm{CS}}^{(i)} &= \mathbf{T}_{\mathrm{C}}^{(i)}\left(\mathbf{T}_{\mathrm{R}}^{(i)}\mathbf{C}^{*}\mathbf{T}_{\mathrm{C}}^{(i)}\right)^{-1}\mathbf{T}_{\mathrm{R}}^{(i)}.\end{aligned} \tag{14}$$

Velmi často bývá výraz $\mathbf{D}_{\mathrm{CS}}^{(i)}\mathbf{q}_{\mathrm{CS}}^{(i)}$ roven nulovému vektoru, neboť neznámé nábojové příspěvky ze zdrojů napětí se eliminují operacemi s řádky a přímé nábojové zdroje či zdroje proudu obvod v drtivé většině případů neobsahuje. Je totiž buzen především ze zdrojů napětí. Vztah (13) lze tedy zjednodušit na výraz

$$\mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{M}^{(i)}\mathbf{u}^{(i-1)} + \mathbf{N}_{\mathrm{S}}^{(i)}\mathbf{u}_{\mathrm{S}}^{(i)}. \tag{15}$$

Tento výraz je základním vztahem pro výpočet uzlových napětí obvodu na konci fáze *i*.

Podíváme-li se pozorně na strukturu matic $\mathbf{M}^{(i)}$ a $\mathbf{N}^{(i)}$, zjistíme, že si lze tyto matice v případě periodicky spínaných obvodů SC připravit dopředu před vlastním simulačním cyklem, a pak je vlastní simulace v časové oblasti velmi rychlá.

Metoda transformace se sloupci a řádky je výhodná v tom, že minimalizuje rozměry matic popisu obvodu v jednotlivých fázích. To přináší rychlejší řešení soustav rovnic vyjádřených danými maticemi pro jednotlivé fáze. U spínaných obvodů je zmenšení rozměru matice obvodu zvlášť výrazné, neboť obvod často obsahuje značný počet spínačů. Cenou za to je čas před vlastní simulací potřebný k sestavení redukovaných matic popisu obvodu a postupu sestavení pravých stran pro jednotlivé fáze.

Metoda redukce obvodové matice je použita i v programu MATSC, který byl sestaven pro časovou simulaci idealizovaných modelů obvodů SC.

3. Popis obvodů SC ve frekvenční oblasti

Viz: Martinek,P., Hospodka,J., Boreš,P.: Elektrické filtry (monografie), Vydavatelství ČVUT, Praha, 2003, kapitola 8 – str. 242-264