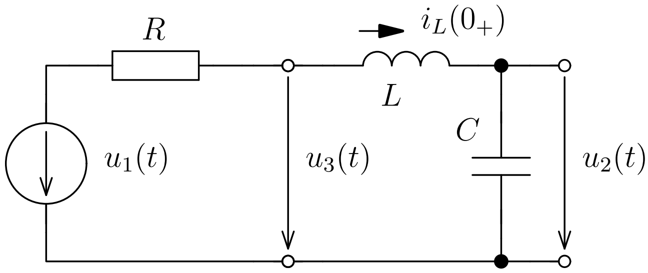
Vlastnosti a popis lineárních systémů

Miloš Laipert, Jan Bičák

30. září 2007

Příklad 1
Lineární spojitý systém je dán zapojením na obr. 1.4. Určete:

- *diferenciální rovnici pro odezvu $u_2(t)$, je-li obvod na vstupu buzen napětím $u_1(t)$,*
- *přenos napětí $H(p) = \dfrac{U_2(p)}{U_1(p)}$,*
- *impulsní odezvu $h(t)$.*



Obrázek 1.4: Zapojení obvodu

Řešení:

Pro zapojení na obr. 1.4 metodou uzlových napětí získáme integrodiferenciální rovnice

$$\begin{aligned} \frac{u_3(t)-u_1(t)}{R} + \frac{1}{L}\int_0^t [u_3(t)-u_2(t)]\mathrm{d}\tau + i_L(0_+) &= 0\ , \\ \frac{1}{L}\int_0^t [u_2(t)-u_3(t)]\mathrm{d}\tau - i_L(0_+) + C\frac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t} &= 0\ , \end{aligned} \qquad (1)$$

ve kterých $i_L(0_+)$ je počáteční podmínka pro proud v induktoru. Derivováním a eliminací proměnné $u_3(t)$ z původních rovnic dostaneme pro odezvu $u_2(t)$ diferenciální rovnici druhého řádu

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_2(t)}{\mathrm{d}t^2} + CR\frac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t} + u_2(t) = u_1(t)\ . \qquad (2)$$

V Laplaceově transformaci platí

$$\mathcal{L}\Big[\frac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t}\Big] = p\ U_2(p) - u_2(0)\ , \qquad \mathcal{L}\Big[\frac{\mathrm{d}^2u_2(t)}{\mathrm{d}t^2}\Big] = p^2\ U_2(p) - p\ u_2(0) - \dot{u}_2(0)\ , \qquad (3)$$

kde

$$\dot{u}_2(0) = \frac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}\ .$$

Při nulových počátečních podmínkách $u_2(0) = 0,\ \dot{u}_2(0) = 0$ a užitím Laplaceovy transformace přejde diferenciální rovnice (3) na algebraickou rovnici

$$p^2\, LCU_2(p) + p\, CRU_2(p) + U_2(p) = U_1(p)\ . \tag{4}$$

Odtud vyplývá přenosová funkce $H(p) = \dfrac{U_2(p)}{U_1(p)}$

$$H(p) = \frac{1}{LC}\frac{1}{p^2 + \dfrac{R}{L}p + \dfrac{1}{LC}} = \frac{Q(p)}{N(p)}\ . \tag{5}$$

K nalezení impulsní odezvy nejprve určíme póly přenosové funkce řešením rovnice $N(p) = 0$

$$p_{\infty 1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \tag{6}$$

- $R > 2\sqrt{L/C}$ .... **dvojice reálných pólů**

$$H(p) = \frac{Q(p)}{N(p)} = \frac{K}{(p+a_1)(p+a_2)} = \frac{k_1}{p+a_1} + \frac{k_1}{p+a_2}\ , \tag{8}$$

$p_{\infty 1} = -a_1$ a $p_{\infty 2} = -a_2$

$$k_1 = \lim_{p \to p_{\infty\mu}} (p - p_{\infty\mu})\frac{Q(p)}{N(p)} = \lim_{p \to p_{-a_1}} (p + a_1)\frac{K}{(p+a_1)(p+a_2)} = \frac{K}{a_2 - a_1}, \tag{9}$$

$$k_2 = \lim_{p \to -a_2} (p + a_2)\frac{K}{(p+a_2)(p+a_2)} = \frac{K}{a_1 - a_2}\ .$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[H(p)\right] = \sum_{\mu=1}^{2} k_\mu e^{p_{\infty\mu} t} = \frac{K}{a_2 - a_1}e^{-a_1 t} + \frac{K}{a_1 - a_2}e^{-a_2 t}\ . \tag{10}$$

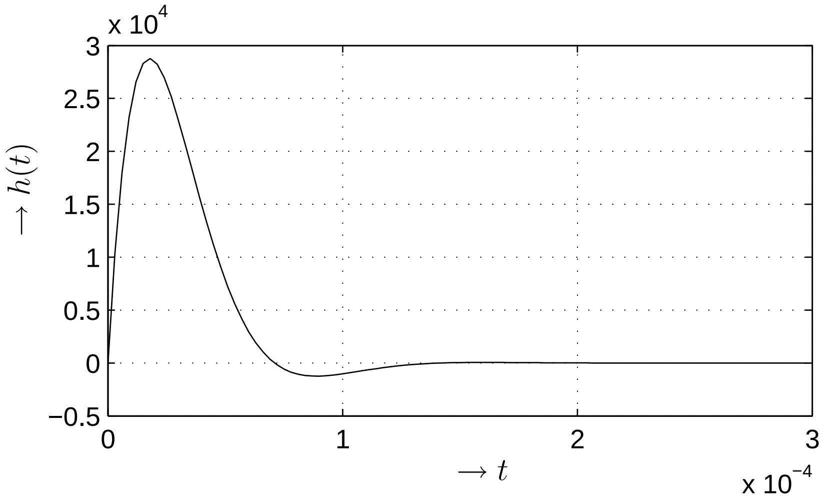
- $R < 2\sqrt{L/C}$ .... **dvojice komplexních pólů**

$$H(p) = \frac{K}{(p + a - \mathrm{j}b)(p + a + \mathrm{j}b)} = \frac{k_1}{p + a - \mathrm{j}b} + \frac{k_1}{p + a + \mathrm{j}b}\ , \tag{11}$$

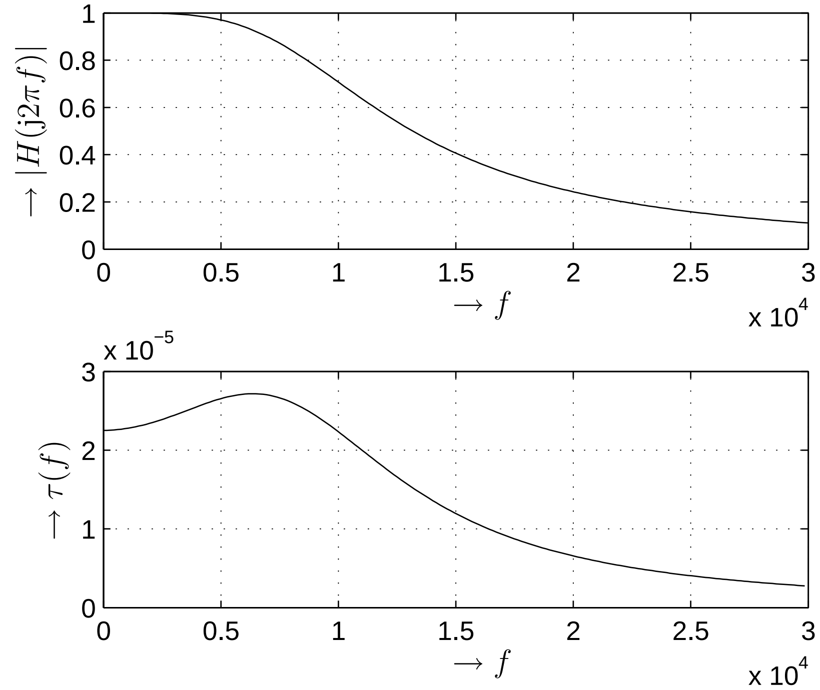
$p_{\infty 1} = -a + \mathrm{j}b$ a $p_{\infty 2} = -a - \mathrm{j}b$.

$$k_1 = -\frac{\mathrm{j}K}{2b}\ , \qquad k_2 = \frac{\mathrm{j}K}{2b}\ . \tag{12}$$

$$\begin{aligned} h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[H(p)\right] = \sum_{\mu=1}^{2} k_\mu e^{p_{\infty\mu} t} &= K\,\Big[-\frac{\mathrm{j}}{2b}e^{-a\,t}e^{\mathrm{j}b\,t} + \frac{\mathrm{j}}{2b}e^{-a\,t}e^{-\mathrm{j}b\,t}\Big] = \\ &= K\frac{e^{-a\,t}}{2b}\Big[-\mathrm{j}\,(\cos(b\,t) + \mathrm{j}\sin(b\,t)) + \mathrm{j}(\cos(b\,t) - \mathrm{j}\sin(b\,t))\Big] = \\ &= \frac{K}{b}e^{-a\,t}\sin(b\,t)\,. \end{aligned} \tag{13}$$



Obrázek 1.5: Impulsní charakteristika



Obrázek 1.6: Modulová charakteristika a skupinové zpoždění filtru

$R = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $L = 11{,}25\,\mathrm{mH}$, $C = 22{,}5\,\mathrm{nF}$:

$$H(p) = \frac{3{,}950\,617 \cdot 10^9}{p^2 + 88\,888{,}89 + 3{,}950\,617 \cdot 10^9} =$$

$$= \frac{3{,}950\,617 \cdot 10^9}{(p + 44\,444{,}45 - \mathrm{j}\,44\,444,45)(p + 44\,444{,}45 + \mathrm{j}\,44\,444{,}45)}\,.$$

$$h(t) = \frac{K}{b} e^{-a\,t} \sin(b\,t) = 88\,888{,}89\, e^{-44\,444{,}45\,t}\, \sin(44\,444{,}45\,t)\,.$$

Program 1

V prostředí Matlab vykreslete průběh funkce (impulsní charakteristiky) z příkladu 1

$$h(t) = \frac{K}{b} e^{-a\,t} \sin(b\,t)$$

pro $t \in \langle 0,\ 3 \cdot 10^{-4} \rangle$, $K = 3{,}951 \cdot 10^9$ a $a = b = 4{,}444 \cdot 10^4$.

Nové operátory a funkce použité v programu:

`=`	přiřazení do proměnné
`linspace`	vytvoří vektor s lineárním rozdělením hodnot
`;`	na konci příkazu potlačí výstup
`+`	sčítání
`*`	násobení
`.*`	násobení vektorů
`/`	dělení
`exp(x)`	funkce e^x
`sin`	funkce sinus
`plot`	kreslení grafu
`grid`	nakreslí mřížku v grafu
`xlabel`	přidá popis na osu X
`ylabel`	přidá popis na osu Y
`title`	přidá popis na vrchol grafu

Vlastní program:

```
t=linspace(0,3e-4,200);
K=3.951e9
a=4.444e4
b=4.444e4
h=K/b*exp(-a*t).*sin(b*t);
plot(t,h)
grid
xlabel t
ylabel h(t)
title 'Impulsní charakteristika'
```

Příklad 2

Určete přenos napětí zapojení obvodu na obr. 1.4 z příkladu 1. Výpočet proveďte z operátorových obvodových rovnic.

Řešení:

Z hlediska analýzy obvodů v kmitočtové oblasti je výhodné sestavovat obvodové rovnice (metodami uzlových napětí a smyčkových proudů) přímo v operátorovém tvaru. Kirchhoffovy zákony pro uzavřenou smyčku a proudy uzlu pak mají tvar

$$\sum_{k=1}^{n} U_k(p) = 0, \quad \sum_{k=1}^{m} I_k(p) = 0.$$

Metodou uzlových napětí pro zapojení na obr. 1.4 obdržíme rovnice

$$\begin{aligned} \frac{U_3(p)-U_1(p)}{R}+\frac{U_3(p)-U_2(p)}{p\,L}&=0,\\ p\,C\,U_2(p)+\frac{U_2(p)-U_3(p)}{p\,L}&=0. \end{aligned} \tag{14}$$

Na rozdíl od (1) jde o algebraické rovnice, ze kterých eliminací uzlového napětí $U_3(p)$ *vyplývá přenosová funkce (5)*

$$H(p)=\frac{U_2(p)}{U_1(p)}=\frac{1}{L\,C}\frac{1}{p^2+\dfrac{R}{L}p+\dfrac{1}{L\,C}}.$$

❧❧❧

Program 2

V prostředí Matlab vyřešte symbolicky soustavu operátorových obvodových rovnic (14) z příkladu 2 a vyjádřete přenosovou funkci. Do symbolického vyjádření přenosové funkce dosaďte konkrétní hodnoty součástek $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $L = 11{,}25\,\mathrm{mH}$, $C = 22{,}5\,\mathrm{nF}$. Přenosovou funkci rozložte na čitatele a jmenovatele. Symbolické vyjádření polynomů převeďte na vektorové vyjádření. Čitatel a jmenovatel upravte tak, aby koeficient u nejvyšší mocniny ve jmenovateli byl roven jedné.

Nové operátory a funkce použité v programu:

`''`	označení řetězce
`solve`	symbolické řešení rovnic
`X.y`	výběr pole y z datové struktury X
`subs`	symbolická substituce
`numden`	čitatel a jmenovatel symbolického výrazu
`format`	nastavení formátu zobrazení čísel
`sym2poly`	symbolické vyjádření polynomu převede na vektorové vyjádření
`A(1)`	první prvek vektoru (koeficient u nejvyšší mocniny polynomu)

Program vyžaduje *Symbolic Math Toolbox*.

Vlastní program:

```
f1='(U3-U1)/R+(U3-U2)/(p*L)=0'
f2='p*C*U2+(U2-U3)/(p*L)=0'
rU=solve(f1,f2,'U2,U3');
rU.U2
rU.U3
P=rU.U2/'U1'
nP=subs(P,{'R','C','L'},{1e3,22.5e-9,11.25e-3})
[num, den]=numden(nP)
format short e
A=sym2poly(den)
B=sym2poly(num)/A(1)
A=A/A(1)
```

Program 3

V prostředí Matlab vykreslete modulovou a fázovou charakteristiku a charakteristiku skupinového zpoždění odpovídající přenosové funkci

$$H(p) = \frac{3{,}950\,617 \cdot 10^9}{p^2 + 88\,888{,}89 + 3{,}950\,617 \cdot 10^9}$$

pro $f \in \langle 0,\ 3 \cdot 10^4 \rangle$.

Nové operátory a funkce použité v programu:

`[1 2 3]`	vytvoří vektor, který odpovídá polynomu $p^2 + 2p + 3$
`freqs`	komplexní frekvenční odezva z analogové přenosové funkce
`pi`	$3{,}141\,592\,653\ldots$
`figure`	nové okno pro grafy
`abs`	absolutní hodnota
`phase`	fáze z komplexního vektoru (fáze je spojitá na okrajích $\pm\pi$)
`diff`	diference prvků vektoru (aproximace derivace)
`./`	dělení vektorů

Program vyžaduje *Signal Processing Toolbox*.

Vlastní program:

```
A=[1 88888 3.9506e9]
B=3.9506e9
f=linspace(0,3e4,200);
w=2*pi*f;
H=freqs(B,A,w);
figure(1)
plot(f,abs(H));
grid
xlabel f
ylabel '|H|'
title 'Modulová charakteristika'
figure(2)
plot(f,phase(H));
grid
xlabel f
ylabel 'PH'
title 'Fázová charakteristika'
t=diff(-phase(H))./diff(w);
figure(3)
plot(f(1:199),t);
grid
xlabel f
ylabel 't'
title 'Skupinové zpoždění'
```

Program 4

Je dána přenosová funkce

$$H(p) = \frac{3{,}950\,617 \cdot 10^9}{p^2 + 88\,888{,}89\,p + 3{,}950\,617 \cdot 10^9}\,.$$

V prostředí Matlab vypočítejte a vykreslete impulsní charakteristiku pro $t \in \langle 0,\ 3 \cdot 10^{-4} \rangle$.

Nové operátory a funkce použité v programu:

`poly2sym`	vektorové vyjádření polynomu převede na symbolické vyjádření
`ilaplace`	inverzní Laplaceova transformace
`vpa`	konverze racionálního čísla na desetinné číslo

Program vyžaduje *Symbolic Math Toolbox*.

Vlastní program:

```
A=[1 88888 3.9506e9]
B=3.9506e9
P=poly2sym(B)/poly2sym(A)
ih=ilaplace(P)
vpa(ih,5)
t=linspace(0,3e-4,200);
plot(t,subs(ih))
grid
```