Póly a nuly penosových funkcí

© Jií Hospodka

Autorská práva: Uživatel mže tento text používat jako studijní materiál bez omezení. Distribbuce a tisk je možný pouze se svolením autora.

Uvedený studijní materiál se zabývá vlivem pol penosu lineárního systému na jeho vlastnosti v kmitotové a asové oblasti. Navazuje na kapitolu odezva.mws, zabývající se odezvou lineárního systému na harmonický signál. Pro pochopení této látky je potebné znát Bodeho aproximaci kmitotových charakteristik (modulové a fázové) penosových funkcí. Penosovou funkci pedpokládáme ve tvaru racionáln lomené funkce. Dále je teba znát Laplaceovu transformaci a její použití pi konstrukci impulzní a pechodové charakteristiky.

```
restart:
```

Pro výpoty a kreslení nkrerých graf budeme potebovat tyto knihovny.

```
> with(plots):with(inttrans):with(plottools):
```

Póly penosových funkcí

Pro penosy s jedním pólem pedpokládejme penosovou funkci systému v tomto taru.

```
> P:=K/(p-p1);
```

$$P := \frac{K}{p - p1} \tag{1}$$

Jeden pól v levé polorovin

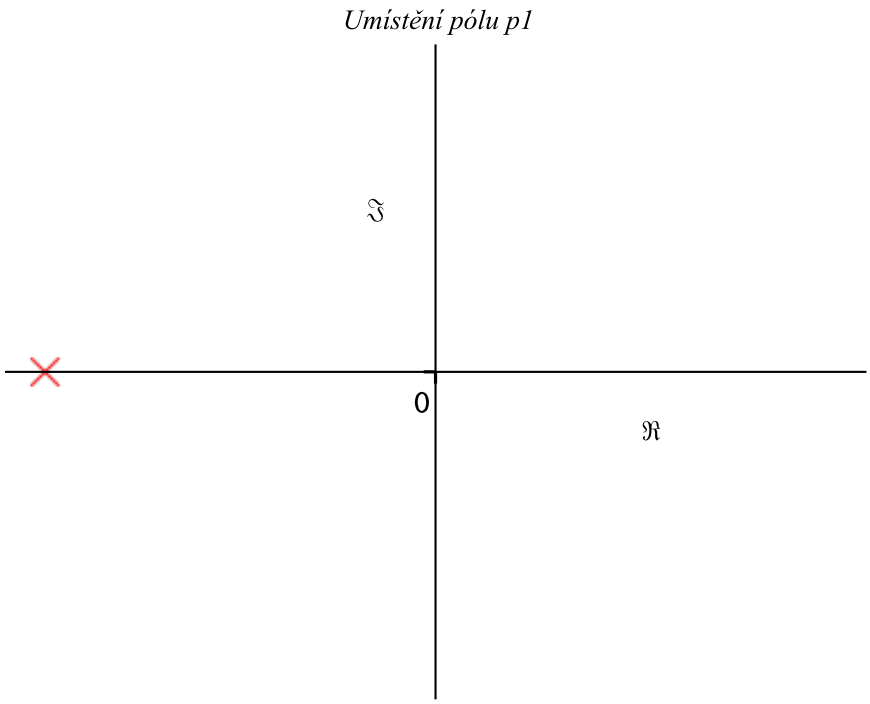
Nap. pro $p1 = -1000$ a $K = 1000$ dostaneme

```
> Pf:=unapply(abs(subs({K=1000,p1=-1000,p=sigma+I*omega},P)),
  (omega,sigma));
```

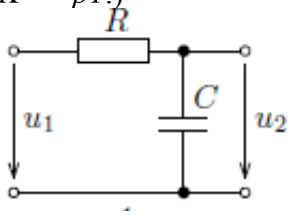
$$P := \frac{K}{p - p1}$$

$$Pf := (\omega, \sigma) \rightarrow \frac{1000}{|\sigma + I\,\omega + 1000|} \tag{1.1}$$

```
> complexplot([-1000],Re=-1100..1100,Im=-1.1..1.1,style=point,
  symbol=diamond,tickmarks=[1,1],title=`Umístní pólu p1`,
  labelfont=[HELVETICA],axesfont=[HELVETICA],symbolsize=25,
  symbol=diagonalcross);
```



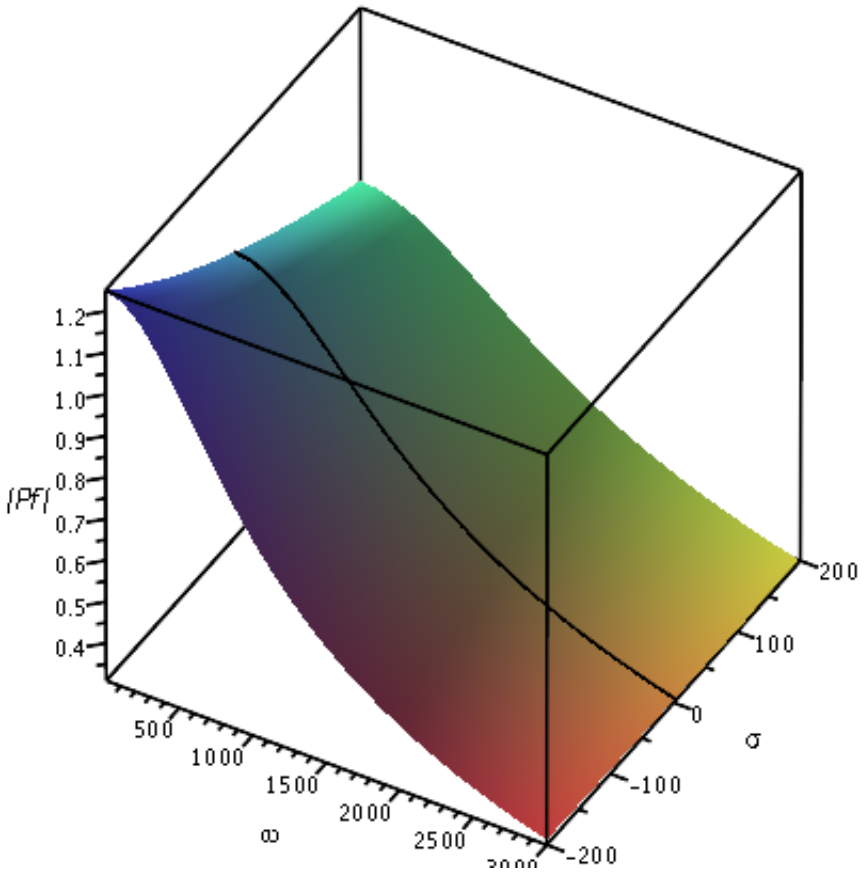
Takovýto penos vykazuje napíklad tento jednoduchý RC lánek. (Pro ss. signál je $P = 1$, proto $K = -p1$.)



"Komplexní kmitoet" je ve tvaru $p = \sigma + j\,\omega$.

```
> Surface:=plot3d(Pf,1..3000,-200..200,style=patchnogrid,axes=
  box,orientation=[-60,50]):
  curve_o:=[omega,0,Pf(omega,0)]:
  B_o:=spacecurve(curve_o,omega=1..3000,axes=none,color=black,
  thickness=3):
  display(Surface,B_o,labels=[omega,sigma,`|Pf|`],title=`Modul
  penosu v závislosti na "kompexním kmitotu" p`,labelfont=
  [HELVETICA],axesfont=[HELVETICA,8]);
```

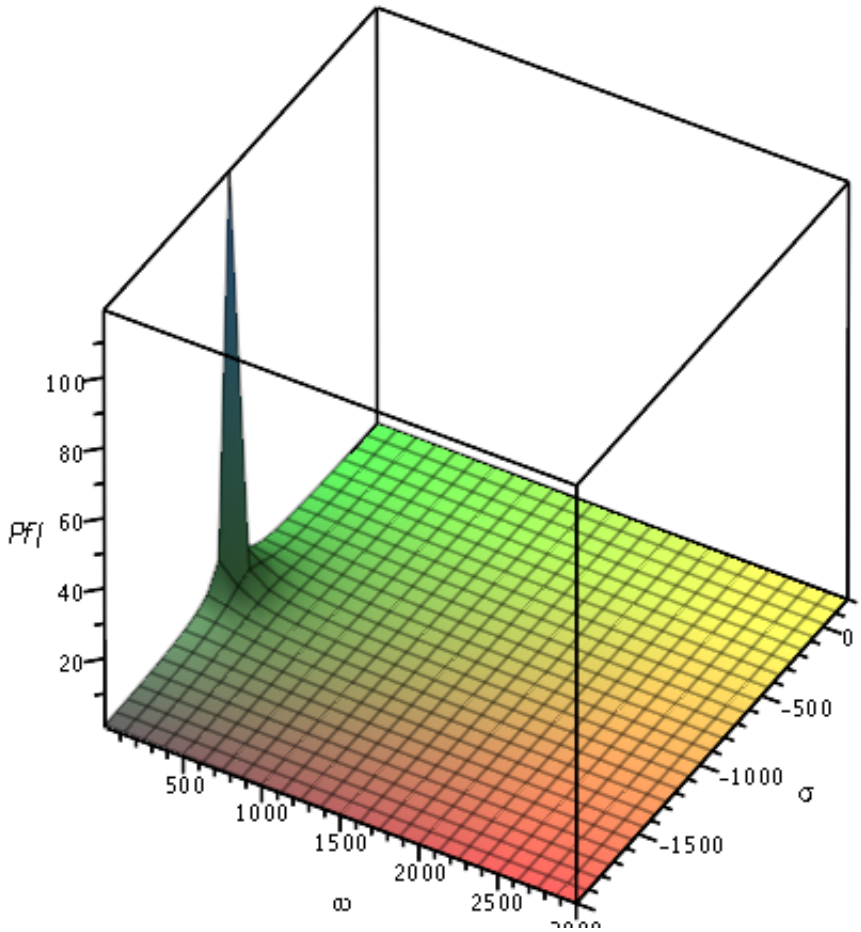
Modul přenosu v závislosti na "kompexním kmitočtu" p



Je zejmé, že pro klesající σ vzrstá penos (pro σ = - 1000 a ω = 0 vykazuje penos maximum (*pp* = ∞)), jak je také vidt na následujícím grafu.

```
> plot3d(Pf,1..3000,-2000..200,style=patch,axes=box,orientation=
  [-60,50],labels=[omega,sigma,`|Pf|`],title=`Modul penosu v
  závislosti na "kompexním kmitotu" p`,labelfont=[HELVETICA],
  axesfont=[HELVETICA,8]);
```

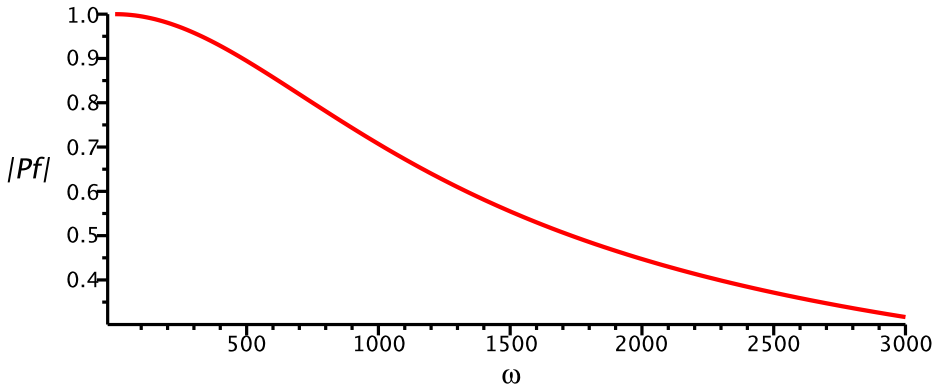
Modul přenosu v závislosti na "kompexním kmitočtu" p



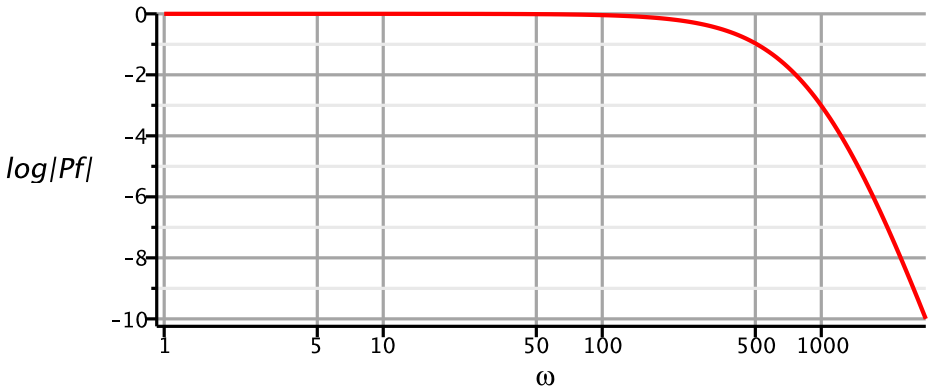
Jestliže nyní vykreslíme prmt tohoto 3D grafu pro $\sigma = 0$ (na prvním grafu oznaeno ernou kivkou) , dostaneme známou modulovou chrakteristiku ($p = j\,\omega$). Na následujících prbzích je navíc ukázáno srovnání pro lineární a logaritmickou stupnici úhlového kmitotu w (3D grafy mají lineární mítka). Zlomovým kmitotem (kmitotem, pi nmž modul penosu poklesne o 3dB) je zde pímo hodnota pólu penosové funkce.

```
> plot(Pf(omega,0),omega=1..3000,title=`Modulová charakteristika
  s lineárním mítkem kmitotu`,labels=[omega,`|Pf|`],labelfont=
  [HELVETICA],axesfont=[HELVETICA,8],thickness=2);
  semilogplot(20*log10(Pf(omega,0)),omega=1..3000,y=-10..0,title=
  `Modulová charakteristika s logaritmickým mítkem kmitotu`,
  labels=[omega,`log|Pf|`],axes=FRAME,labelfont=[HELVETICA],
  axesfont=[HELVETICA,8],thickness=2,gridlines=true);
```

Modulová charakteristika s lineárním měřítkem kmitočtu



Modulová charakteristika s logaritmickým měřítkem kmitočtu



Jestliže provedeme inverzní Laplaceovu transformaci výrazu pro penos, dostaneme rovnici pro píslušnou impulzní charakteristiku (odezvu na Dirakúv pulz), pípadn i pechodovou charalteristiku (odezvu na jednotkový skok).

```
> Pt:=invlaplace(P, p, t);
> Ptp:=invlaplace(P/p, p, t);
```

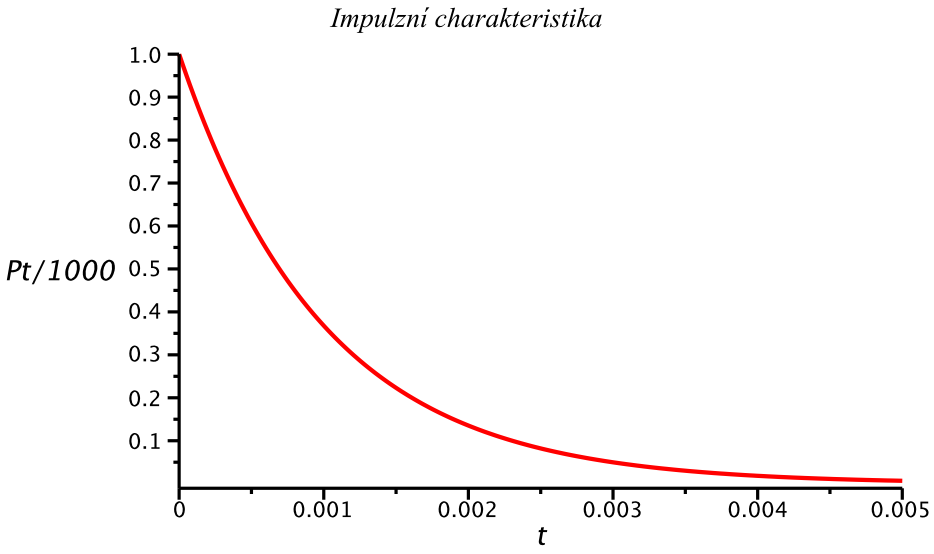
$$Pt := K\,e^{p1\,t}$$

$$Ptp := \frac{K\left(e^{p1\,t}-1\right)}{p1} \qquad \textbf{(1.2)}$$

Pro stabilní systém je nutné, aby po odezzní pechodovédo dje se výstupní veliina lineárního systému ustálila na konené hodnot. To znamená, že pól $p1$ musí být záporný, jak tomu je v tomto píklad a což dokazuje následující výpoet i graf.

```
> `Pt `(t=infinity)=limit(Pt,t=infinity) assuming (p1<0);
  plot(subs({K=1000,p1=-1000},Pt/1000),t=0..0.005,labels=[t,
  `Pt/1000`],title=`Impulzní charakteristika`,labelfont=
  [HELVETICA],axesfont=[HELVETICA,8],thickness=2);
```

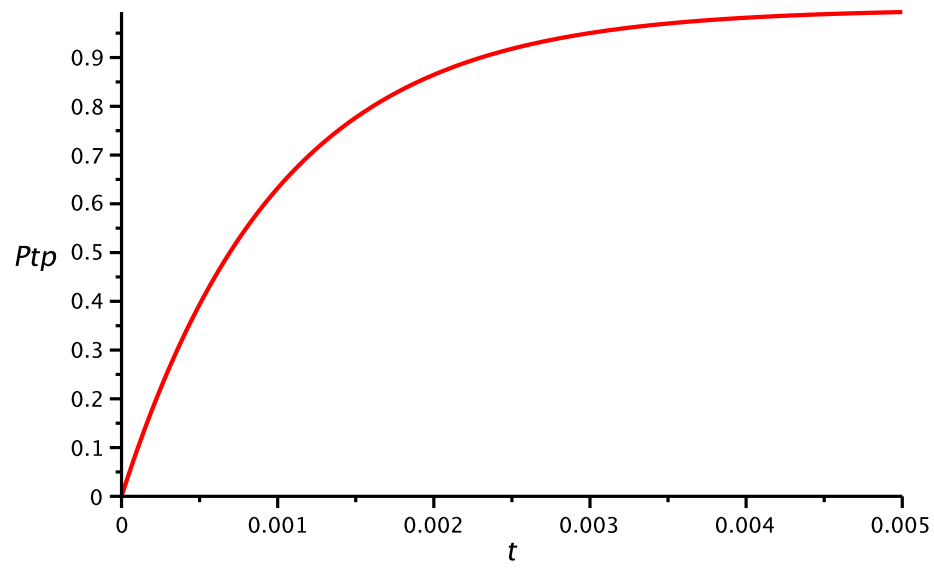
$$Pt\,(t=\infty)=0$$



Pro úplnost je uvedena odezva na jedtkový impulz.

```
> `Ptp `(t=infinity)=limit(Ptp,t=infinity) assuming (p1<0);
  plot(subs({K=1000,p1=-1000},Ptp),t=0..0.005,labels=[t,` Ptp`],
  title=`Impulzní charakteristika`,labelfont=[HELVETICA],
  axesfont=[HELVETICA,8],thickness=2);
```

$$Ptp\ (t = \infty) = -\frac{K}{p1}$$



Jeden pól v pravé polorovin

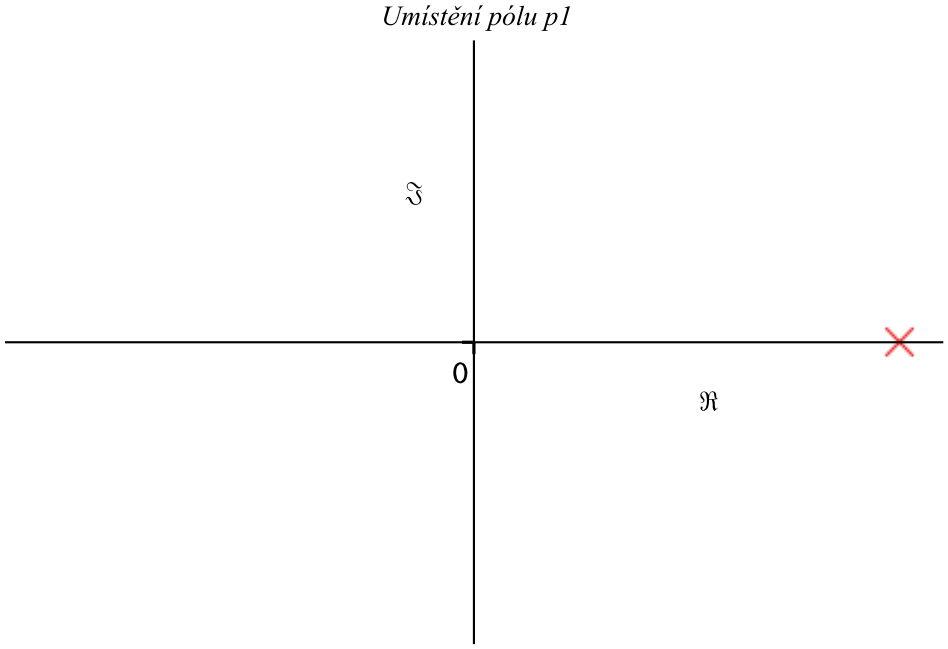
Nap. pro $p1 = 1000$ a $K = 1000$ dostaneme

```
> P;
  Pf:=unapply(abs(subs({K=1000,p1=1000,p=sigma+I*omega},P)),
  (omega,sigma));
```

$$\frac{K}{p - p1}$$

$$Pf := (\omega, \sigma) \rightarrow \frac{1000}{|\sigma + I\,\omega - 1000|} \qquad \textbf{(2.1)}$$

```
> complexplot([1000],Re=-1100..1100,Im=-1.1..1.1,style=point,
  symbol=diamond,tickmarks=[1,1],title=`Umístní pólu
  p1`,labelfont=[HELVETICA],axesfont=[HELVETICA],symbolsize=25,
  symbol=diagonalcross);
```



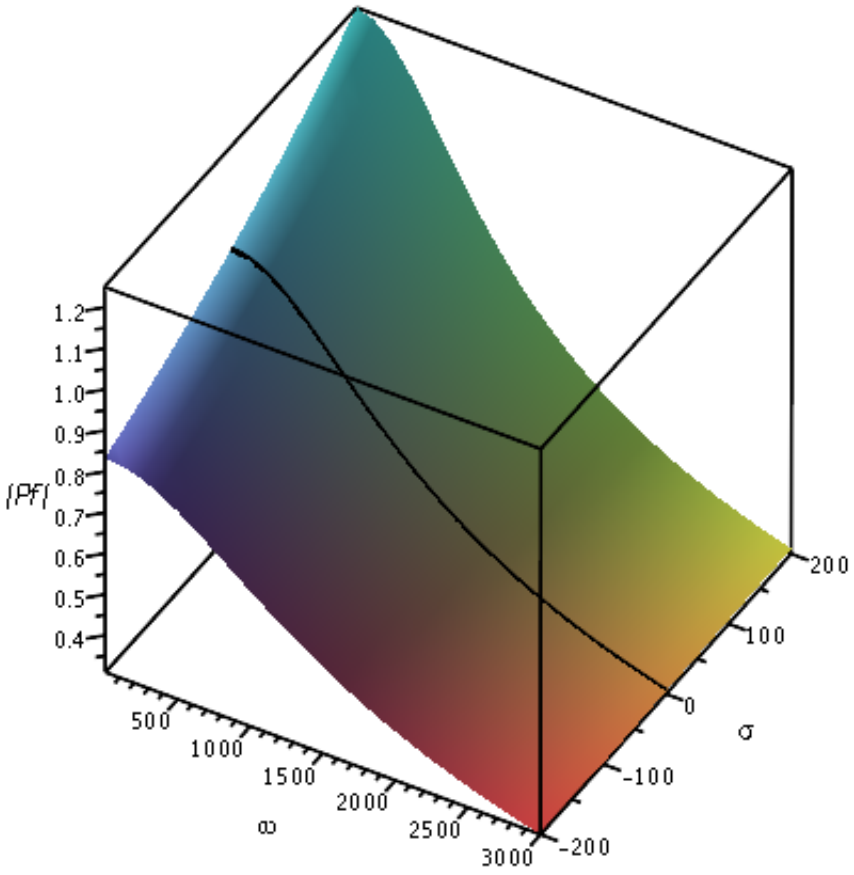
Zde analogicky k pedchzímu píkladu pro vzrstající σ, vzrstá i *hypotetický* penos (pro $\sigma = 1000$ a $\omega = 0$ vykazuje modul penosu maximum ($pp = \infty$)). Pro jsme nazvali penos *hypotetickým* se ukáže v závru této sekce.

Na následujícím grafu je již vykreslen pouze výez.

```
> Surface:=plot3d(Pf,1..3000,-200..200,style=patchnogrid,axes=
  box,orientation=[-60,50]):
  curve_o:=[omega,0,Pf(omega,0)]:
  B_o:=spacecurve(curve_o,omega=1..3000,axes=none,color=black,
  thickness=3):
```

```
display(Surface,B_o,labels=[omega,sigma,`|Pf|`],title=
`Hypotetický modul penosu v závislosti na "kompexním kmitotu"
p`,labelfont=[HELVETICA],axesfont=[HELVETICA,8]);
```

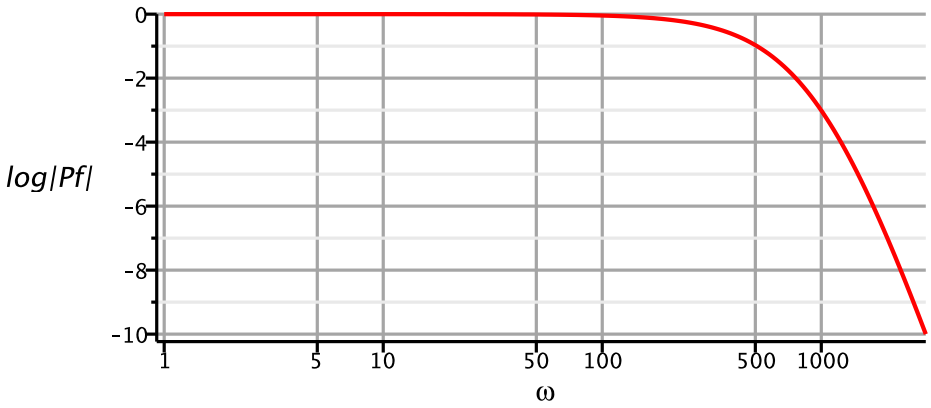
Hypotetický modul přenosu v závislosti na "kompexním kmitočtu" p



Jak je zejmé, bude *hypotetická* modulová chrakteristika takového penosu vykazovat stejný prbh jako v pedešlém pípad. Co se týe samotného prbhu se bude lišit pouze charakteristika fázová, a to posunutím o π (není vykreslena).

```
> semilogplot(20*log10(Pf(omega,0)),omega=1..3000,y=-10..0,title=
  `Hypotetická modulová charakteristika penosu`,labels=[omega,
  `log|Pf|`],axes=FRAME,labelfont=[HELVETICA],axesfont=
  [HELVETICA,8],thickness=2,gridlines=true);
```

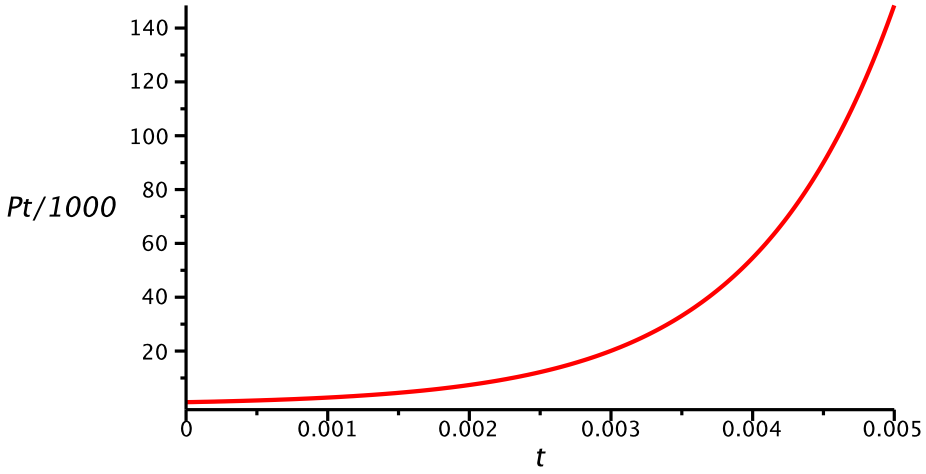
Hypotetická modulová charakteristika přenosu



Odezva na Dirakv impulz však má tvar, z ehož vyplývá, že obvod popsaný výše uvedeným penosem je nestabilní, a tudíž **nelze mluvit ani o penosu ani o kmitotové charakteristice (nelze použít substituci** $p = I\,\omega$**,** tj. **FT, viz.** odezva.mws**) . Výše uvedené grafy jsou tudíž pouhým vykreslením matematického výrazu a nemají s realitou obvodu nic spoleného!** Z tohoto dvodu jsme je nazývali *hypotetickými.* Ze stejného dvodu není uvedená ani možná realizace obvodu. Tato realizace by byla pouze teoretická, protože pro žádný reálný systém není možné, aby jakýkoli signál rostl nade všechny meze, jak to ukazuje následující prbh. Reálný systém je ve své podstat vždy nelineární a tyto nelinearity vždy omezí velikost jakéhokoli signálu.

```
> plot(subs({K=1000,p1=1000},Pt/1000),t=0..0.005,labels=[t,`
  Pt/1000`],title=`Impulzní charakteristika`,labelfont=
  [HELVETICA],axesfont=[HELVETICA,8],thickness=2);
```

Impulzní charakteristika



Komplexn sdružená dvojice pól

```
> P:=K/(p-p1)/(p-p2);
```

$$P := \frac{K}{(p - p1)\,(p - p2)} \qquad \textbf{(3.1)}$$

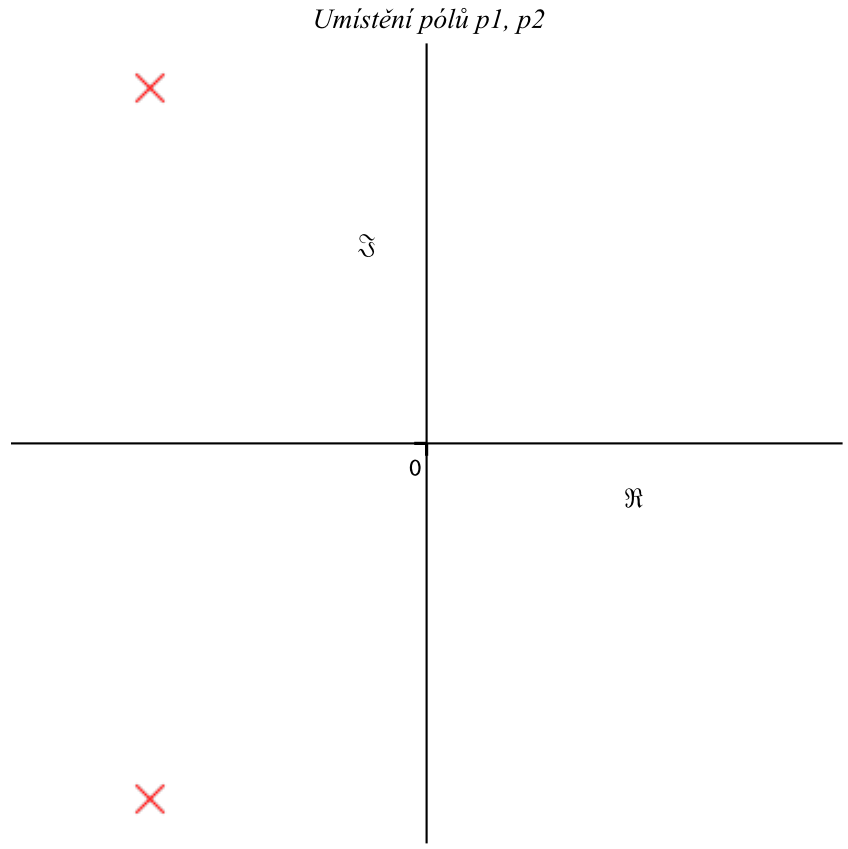
Komlexn sdružená dvojice pól se zápornou reálnou ástí

Nap. pro $p1 = -200 + I \cdot 980$, $p2 = -200 - I \cdot 980$ a $K = 1000^2$ dostaneme

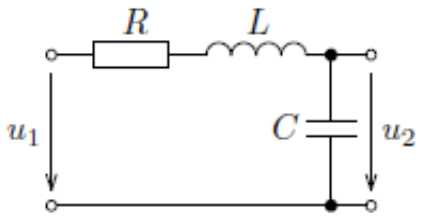
```
> Pf:=abs(subs({K=1000^2,p1=-200+I*980,p2=-200-I*980,p=sigma+I*
  omega},P));
```

$$Pf := 1000000 \left| \frac{1}{(\sigma + I\,\omega + 200 - 980\,I)\,(\sigma + I\,\omega + 200 + 980\,I)} \right| \qquad \textbf{(3.1.1)}$$

```
> complexplot([-200+I*980,-200-I*980],Re=-300..300,Im=-1100.
  .1100,style=point,symbol=cross,tickmarks=[1,1],title=
  `Umístní pól p1, p2`,labelfont=[HELVETICA],axesfont=
  [HELVETICA,8],symbolsize=25,symbol=diagonalcross);
```



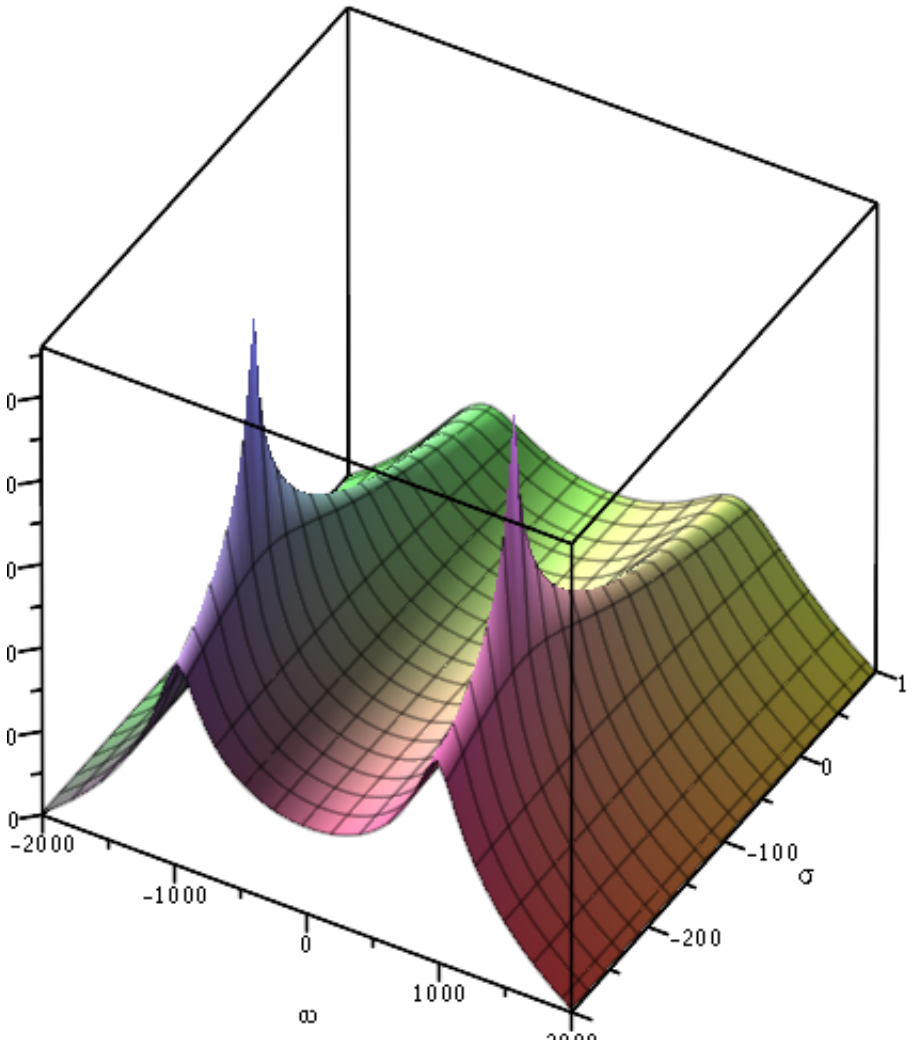
Penos tohoto typu vykazyje napíklad takovýto jednoduchý rezonanní RLC obvod.



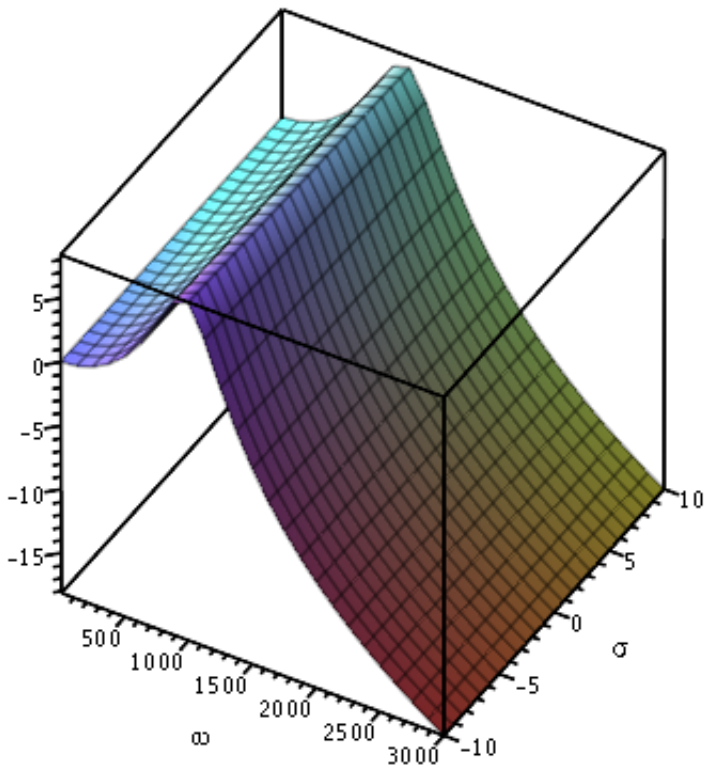
V následujících grafech je vynášen penos vždy v dB, abychom dosáhli "vtší dynamiky" na ose penosu. Z tchto a pedcházejících graf je také zejmé, pro pouze komlexn združené koeny mohou vyvolat tzv. "pekmit" na modulové charakteristice. Tím, že má pól nenulovou imaginární ást nastává maximum $|pp|$ na jiném kmitotu než na $\omega = 0$. (nastává pro $p = -200 - I \cdot 980$ a $p = -200 + I \cdot 980$).

```
> plot3d(20*log10(Pf),omega=-2000..2000,sigma=-300..100,style=
  patch,axes=box,orientation=[-60,50],numpoints=2000,labels=
  [`omega`,`sigma`,`20*log|Pf|`],numpoints=3000,title=`Modul
  penosu v závislosti na "kompexním kmitotu"p`,labelfont=
  [HELVETICA],axesfont=[HELVETICA,8]);
  plot3d(20*log10(Pf),omega=1..3000,sigma=-10..10,style=patch,
  axes=box,orientation=[-60,50],title=`Modul penosu v
  závislosti na "kompexním kmitotu" p`,labelfont=[HELVETICA],
  axesfont=[HELVETICA,8]);
```

Modul přenosu v závislosti na "kompexním kmitočtu"p



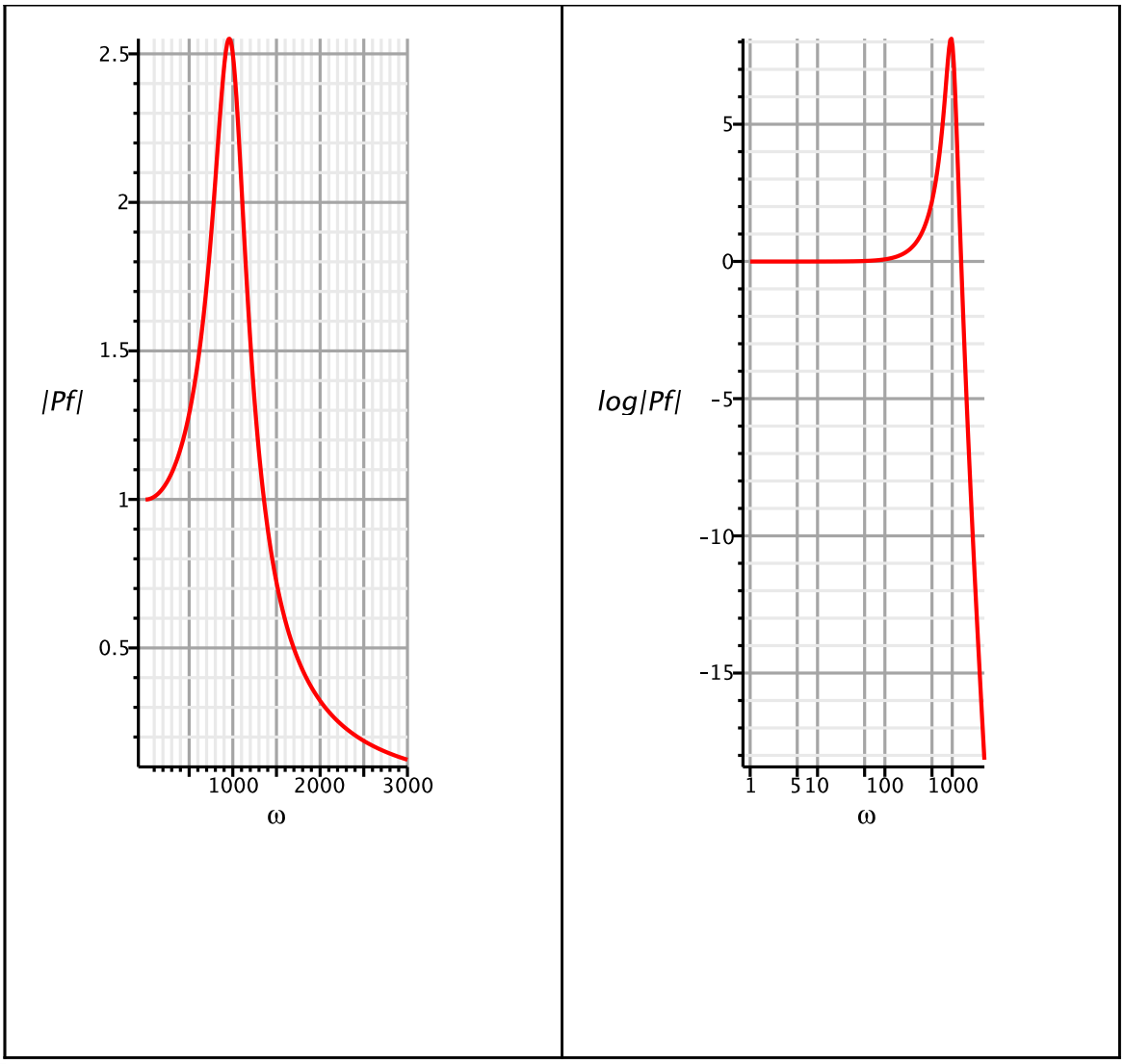
Modul přenosu v závislosti na "kompexním kmitočtu" p



Je pochopitelné, že pro reálný kladný kmitoet nenastane maximum penosu, ale mže nastat poze "pekmit" modulové charakteristiky tak, jak je vidt na tomto obrázku. Dále už budeme vykreslovat grafy pouze pro kladné ω.

Následuje prbh modulové charakteristiky penosu vykreslený v lineárním a logaritmickém mítku .

```
> display(matrix(1,2,[plot(subs(sigma=0,Pf),omega=1..3000,
  labels=[omega,`|Pf|`],axes=FRAME,labelfont=[HELVETICA],
  axesfont=[HELVETICA,8],thickness=2,gridlines=true),
  semilogplot(20*log10(subs(sigma=0,Pf)),omega=1..3000,labels=
  [omega,`log|Pf|`],axes=FRAME,labelfont=[HELVETICA],axesfont=
  [HELVETICA,8],thickness=2,gridlines=true)],array));
```



asovou odezvu tohoto systému na Diracv impulz ukážeme v závru celé této seckce. Tuto otázku potom vyešíme obecnji pro všechny typy lineárních sysrém, tedy i nestabilními, kterými se pro úplnost budeme zabývat v následujícím výkladu.

Komlexn sdružená dvojice pól s nulovou reálnou ástí

Tento systém bychom mohli teoreticky realizovat díve uvedeným rezonanním obvodem RLC s nulovým odporem rezistoru. V praxi však nelze vytvoit bezestrátový pasivní obvod a obvod s tímto penosem lze realizovat s použitím aktivních prvk (oscilátory).

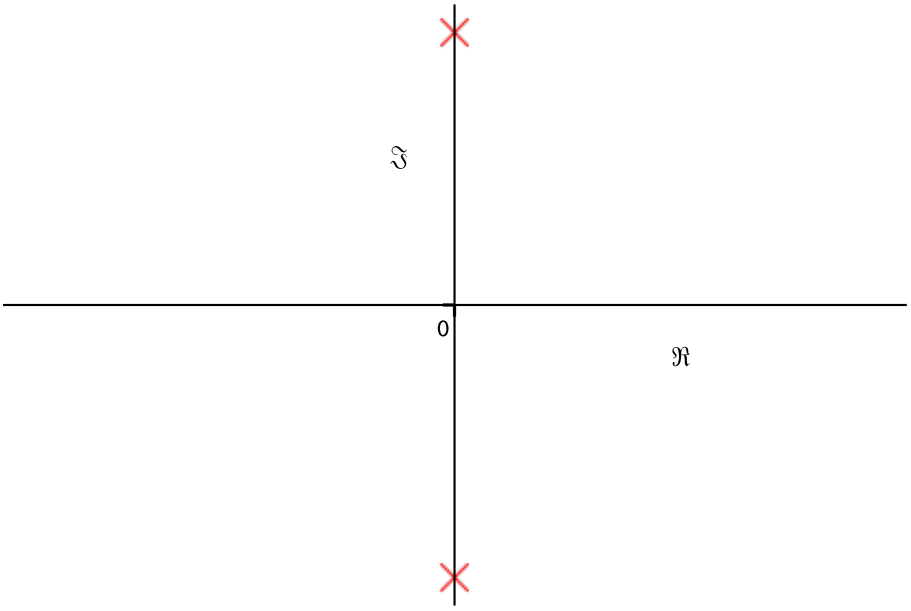
Nap. pro $p1 = I \cdot 1000$, $p2 = -I \cdot 1000$ a $K = 1000^2$ dostaneme

```
> Pf:=abs(subs({K=1000^2,p1=I*1000,p2=-I*1000,p=sigma+I*omega},
  P));
```

$$Pf := 1000000 \left| \frac{1}{(\sigma + I\,\omega - 1000\,I)\,(\sigma + I\,\omega + 1000\,I)} \right| \qquad \textbf{(3.2.1)}$$

```
> complexplot([I*1000,-I*1000],Re=-300..300,Im=-1100..1100,
  style=point,symbol=diamond,tickmarks=[1,1],title=`Umístní
  pól p1, p2`,labelfont=[HELVETICA],axesfont=[HELVETICA,8],
  symbolsize=25,symbol=diagonalcross);
```

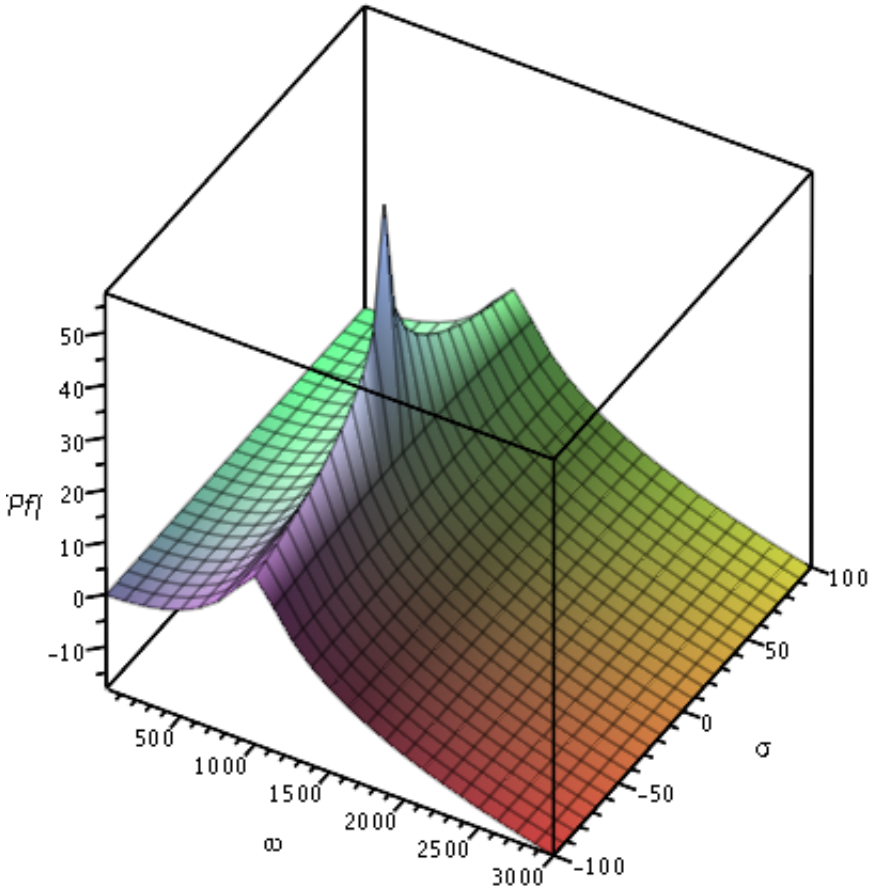
Umístění pólů p1, p2



V následujících grafech je vynášen penos opt v dB. Navíc v tomto pípad se jedná o penos hypotetický (nereálný), jak ukážeme dále.

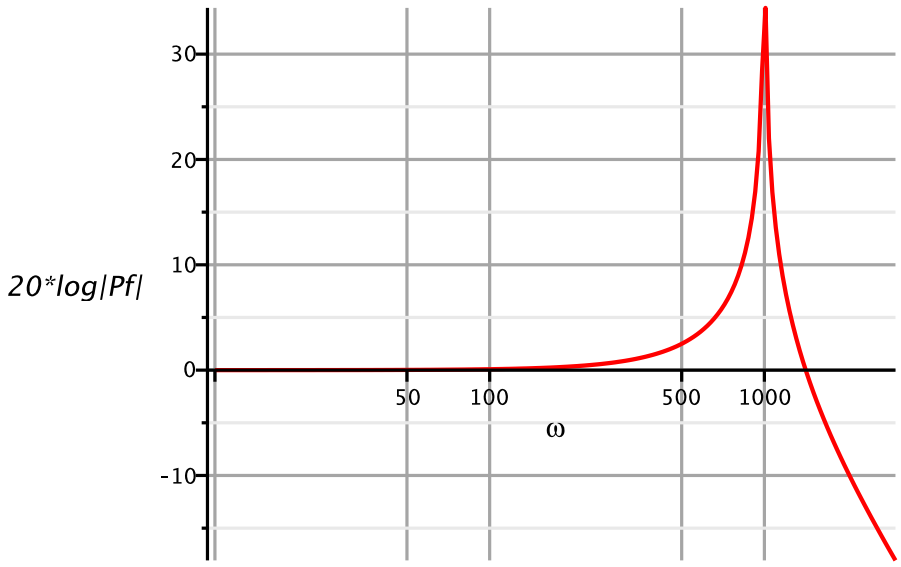
```
> plot3d(20*log10(Pf),omega=1..3000,sigma=-100..100,style=
  patch,axes=box,orientation=[-60,50],labels=[`omega`,`sigma`,
  `20*log|Pf|`],title=`Hypotetický modul penosu v závislosti
  na "komplexním kmitotu" p`,labelfont=[HELVETICA],axesfont=
  [HELVETICA,8]);
```

Hypotetický modul přenosu v závislosti na "komplexním kmitočtu" p




```
> semilogplot(20*log10(subs(sigma=0,Pf)),omega=10..3000,title=
  `Hypotetická modulová charakteristika penosu`,labels=
  [`omega`,`20*log|Pf|`],labelfont=[HELVETICA],axesfont=
  [HELVETICA,8],thickness=2,gridlines=true);
```

Hypotetická modulová charakteristika přenosu



Zde již je patrné, že modul penosu je pouze hypotetický, jelikož roste nade všechny meze pro reálný kmitoet (v grafu pouze na cca 35 dB díky konenému potu bod; dkazem je však následující limita.

```
> `Pf `(omega=1000, sigma=0)=limit(subs(sigma=0,Pf),omega=1000)
  ;
```

$$Pf(\omega = 1000, \sigma = 0) = \infty \qquad \textbf{(3.2.2)}$$

asovou odezvu tohoto systému na Diracv impulz ukážeme opt v závru celé této seckce.

Komlexn sdružená dvojice pól s kladnou reálnou ástí

Obvod s tímto penosm lze *teoreticky* realizovat pouze s využitím aktivních prvk, viz pípad jednoduchého pólu v pravé polorovin.

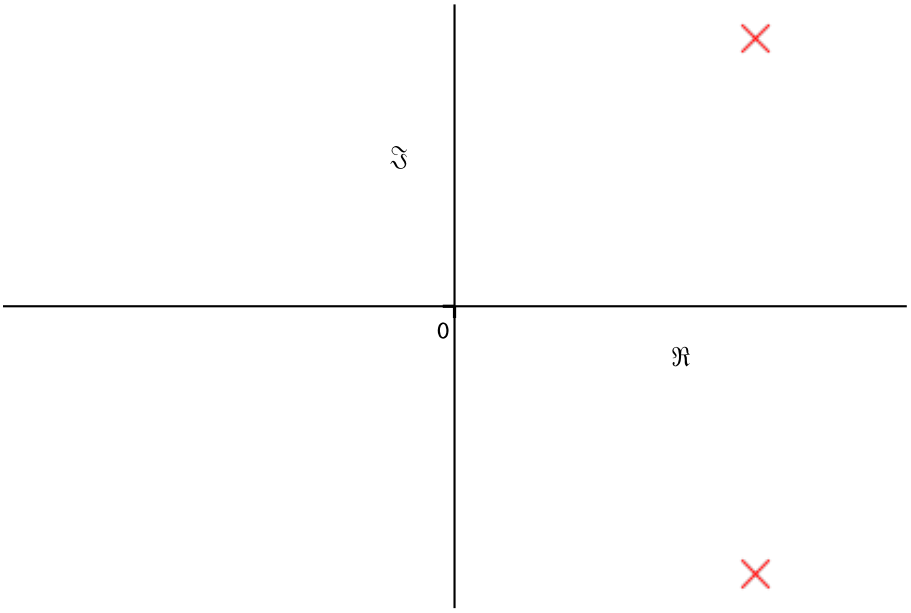
Nap. pro $p1 = 200 + I \cdot 980$, $p2 = 200 - I \cdot 980$ a $K = 1000^2$ dostaneme

```
> Pf:=abs(subs({K=1000^2,p1=+200+I*980,p2=+200-I*980,p=sigma+I*
  omega},P));
```

$$Pf := 1000000 \left| \frac{1}{(\sigma + I\,\omega - 200 - 980\,I)\,(\sigma + I\,\omega - 200 + 980\,I)} \right| \qquad \textbf{(3.3.1)}$$

```
> complexplot([200+I*980,200-I*980],Re=-300..300,Im=-1100.
  .1100,style=point,symbol=cross,tickmarks=[1,1],title=
  `Umístní pól p1, p2`,labelfont=[HELVETICA],axesfont=
  [HELVETICA,8],symbolsize=25,symbol=diagonalcross);
```

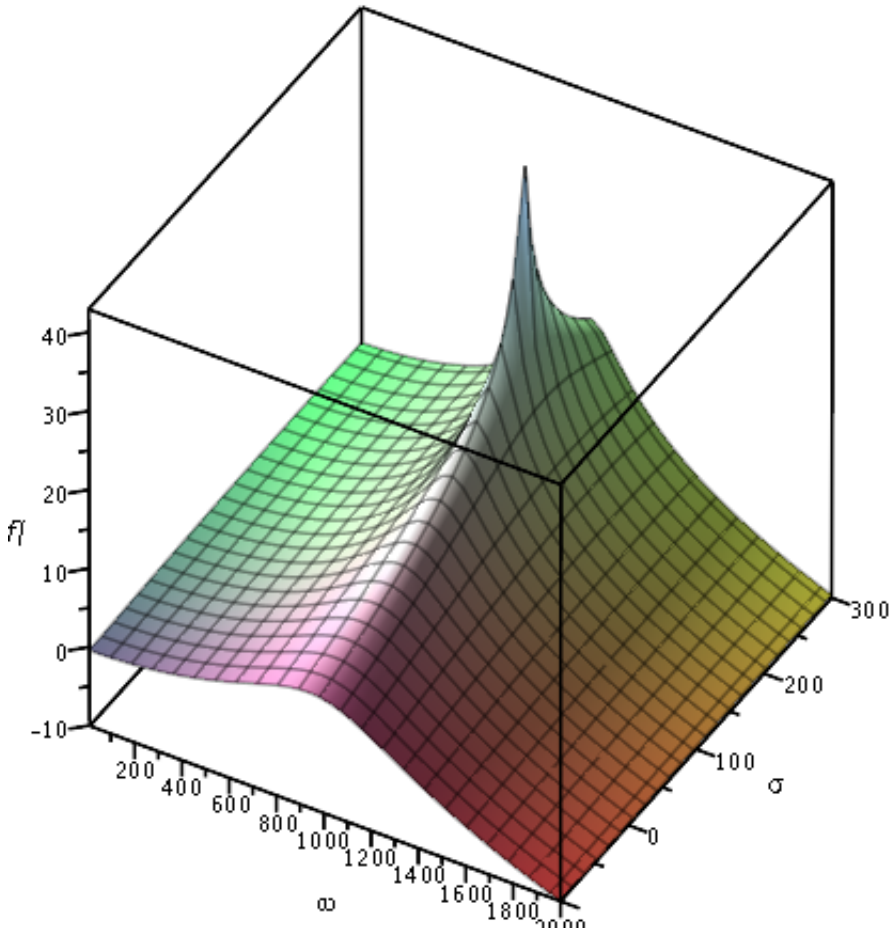
Umístění pólů p1, p2



Jako v pedchozím píklad je i zde vynášen penos v dB a opt, z dvodu nestability, je penos hypotetický.

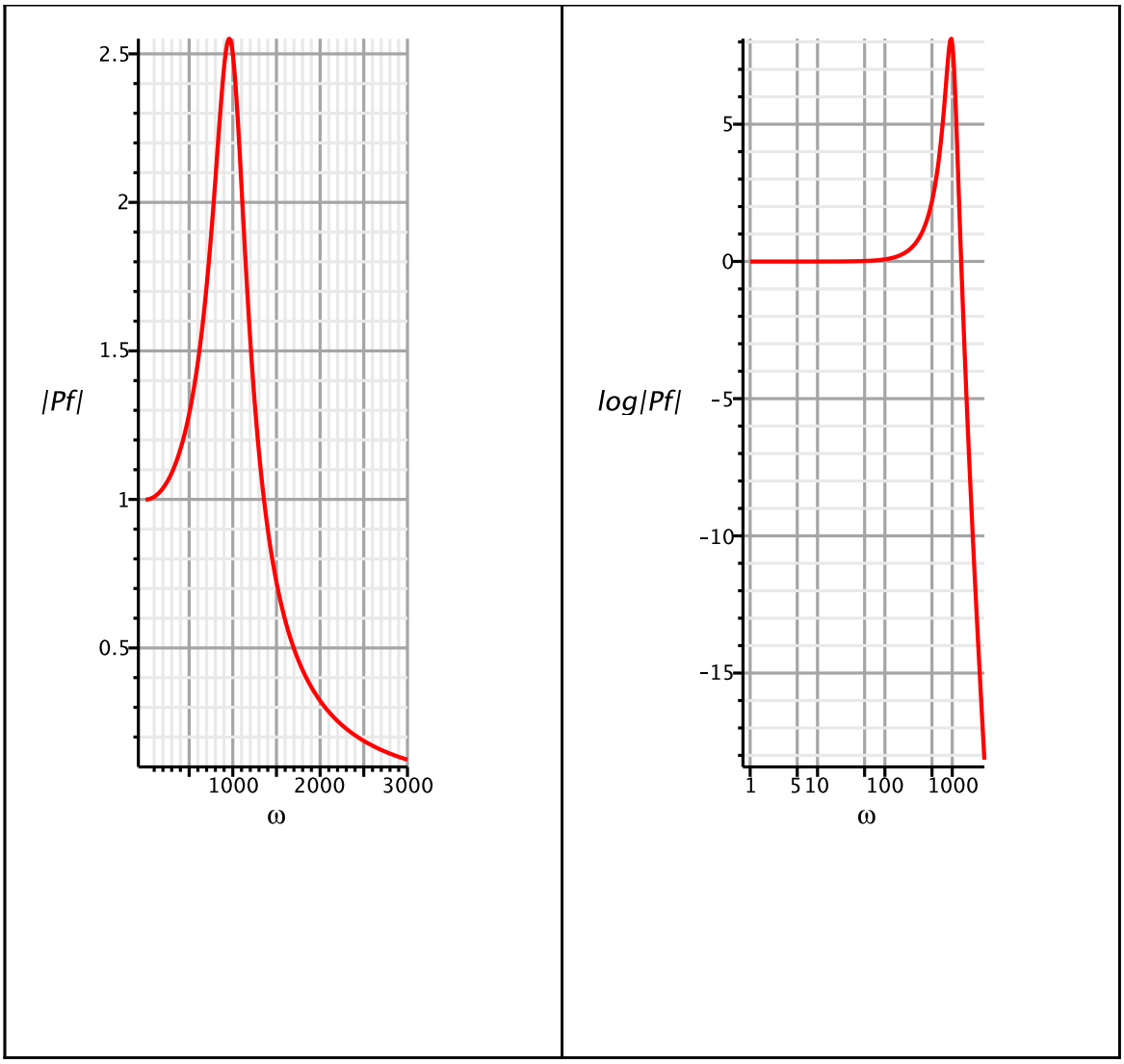
```
> plot3d(20*log10(Pf),omega=10..2000,sigma=-100..300,style=
  patch,axes=box,orientation=[-60,50],numpoints=2000,title=
  `Hypotetický modul penosu v závislosti na "kompexním
  kmitotu" p`,labels=[`omega`,`sigma`,`20*log|Pf|`],labelfont=
  [HELVETICA],axesfont=[HELVETICA,8]);
```

Hypotetický modul přenosu v závislosti na "kompexním kmitočtu" p



Opt následuje prbh hypotetické modulové charakteristiky penosu vykreslený v lineárním a logaritmickém mítku ω.

```
> display(matrix(1,2,[plot(subs(sigma=0,Pf),omega=1..3000,
  labels=[omega,`|Pf|`],axes=FRAME,labelfont=[HELVETICA],
  axesfont=[HELVETICA,8],thickness=2,gridlines=true),
  semilogplot(20*log10(subs(sigma=0,Pf)),omega=1..3000,labels=
  [omega,`log|Pf|`],axes=FRAME,labelfont=[HELVETICA],axesfont=
  [HELVETICA,8],thickness=2,gridlines=true)],array));
```



asové odezvy systém se dvma póly

Pro výše popsaný penos lze najít pomocí zptné Laplaceovy transformace výraz pro impulzní charakteristiku,

```
> Pt:=invlaplace(P, p, t);
```

což je zejmé, uvdomíme-li si, že lze zmínný penos pepsat do tvaru sotu ástených zlomk.

```
> P=convert(P,parfrac,p);
```

$$Pt := \frac{K\left(-e^{p2\,t} + e^{p1\,t}\right)}{p1 - p2}$$

$$\frac{K}{(p - p1)\,(p - p2)} = \frac{K}{(p1 - p2)\,(p - p1)} - \frac{K}{(p1 - p2)\,(p - p2)} \qquad \textbf{(3.4.1)}$$

Pro obecn zadané komlexn sdružené póly penosu $(\sigma_p + j\,\omega_p,\ \sigma_p - j\,\omega_p)$, lze potom impulzní charakteristiku vyjádit ve tvaru:

```
> Ptk:=evalc(subs({p1=sigma[p]+I*omega[p],p2=sigma[p]-I*omega
  [p]},Pt));
```

(3.4.2)

$$Ptk := \frac{K\, e^{t\sigma_p} \sin(t\,\omega_p)}{\omega_p} \qquad \textbf{(3.4.2)}$$

Úpravou tvaru *ptt* (vyjádením reálné ásti) jsme získali pedpokládaný výsledek. Je zejmé, že imaginární ást reálného signálu (odezvy) musí být nulová.

Díve než si ukážeme konkrétní prbh impulzní charakteristiky, zastavme se u daného výsledku impuzní charakteristiky *Re(ptt)*. Je vidt, že pítomnost komplexn sdružených pól v penosové funkci má za následek výskyt tlumené harmické složky ve výstupním signálu (pirozené odezv). Kmitoet sinusové složky je roven **pirozenému (vlastnímu) kmitotu** ω_p; σ_p se nazývá **absolutním initelem tlumení**. Jak je z vidt ze vztahu Re(ptt), musí být pro stabilní systém tento initel záporný, resp. musí platit $\lim_{t\to\infty} e^{t\sigma_p} = 0$.

Nyní roznásobíme výraz pro penos a dosadíme za koeny výrazy $p1 = \sigma_p + I\,\omega_p$, $p2 = \sigma_p - I\,\omega_p$

.

```
> Pk:=K/expand(subs({p1=sigma[p]+I*omega[p],p2=sigma[p]-I*omega
  [p]},denom(P)));
```

$$Pk := \frac{K}{p^2 - 2\,p\,\sigma_p + \sigma_p^2 + \omega_p^2} \qquad \textbf{(3.4.3)}$$

Provedeme nové piazení, které jak dále ukážeme bude výhodné pro charakterizaci penos s koplexními póly .

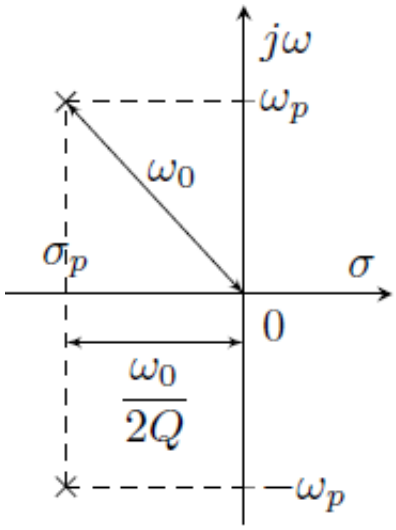
```
> omega[0]^2=omega[p]^2+sigma[p]^2;
  xi=abs(sigma[p])/omega[0];
  Q=omega[0]/2/abs(sigma[p]);
```

Je patrné, že ω_0 vyjaduje modul pólu ($|p1| = |p2|$). Tento kmitoet je vlastn *zlomovým kmitotem* modulové charakteristiky stabilního systému, piemž si musíme uvdomit, ž v pípad koplexn združeného pólu zaávisí tvar kmitotových charakteristik jak na ω_0, tak na Q nebo ξ (pi dvojnásobném reálném pólu vykazuje modul penosu pro $\omega = \omega_0$ pokles o 6dB). Jelikož výše zmínný absolutní initel tlumení σ_p není výhodné udávat, protože bychom jej museli udávat spolu s vlastním kmitotem ω_p, definujeme initel ξ nebo astji Q. initel ξ se pro stabilní systém ($\sigma_p < 0$) nazývá **relatinní initel tlumení** a initel Q **initel jakosti** píslušející dané dvojici komlexn sdružených pól. Vztah mezi zlomovým kmitotem ω_0 a ω_p, σ_p je zejný z následujících rovností, nebo názornji z níže uvedených obrázk. initel jakosti Q navíc velmi názorn vystihuje prbh modulové charakteristiky, jak dále ukážeme. Pi zlomovém kmitotu mže modulová charakteristika vykazovat jak pekmit, tak pokles oproti "asymptotické" hodnot, piemž skutená hodnota modulu penosu pi tomto kmitotu je Q násobkem "asymptotické" hodnoty.

$$\omega_0^2 = \omega_p^2 + \sigma_p^2$$

$$\xi = \frac{|\sigma_p|}{\omega_0}$$

$$Q = \frac{1}{2}\ \frac{\omega_0}{|\sigma_p|} \qquad \textbf{(3.4.4)}$$



Pedpokládejme koeny v levé polorovin ($\sigma_p < 0$, tj. $\sigma_p = -\frac{\omega_0}{2\,Q}$). Výraz pro penos nyní mžeme pepsat do následujícího tvaru.

```
> Pq:=subs({omega[p]^2=omega[0]^2-(omega[0]/2/Q)^2,sigma[p]=-
  omega[0]/2/Q},Pk);
```

$$Pq := \frac{K}{p^2 + \frac{p\,\omega_0}{Q} + \omega_0^2} \qquad \textbf{(3.4.5)}$$

Pro koeny platí:

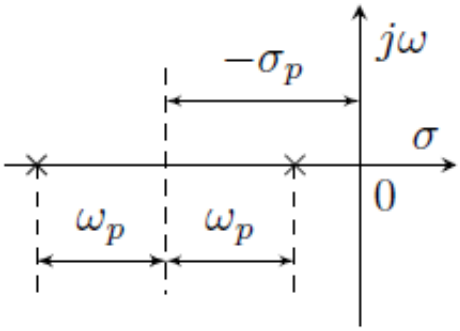
```
> p12:=solve(denom(Pq),p);
```

$$p12 := \frac{1}{2}\ \frac{\left(-1 + \sqrt{1 - 4\,Q^2}\right)\omega_0}{Q},\ -\frac{1}{2}\ \frac{\left(1 + \sqrt{1 - 4\,Q^2}\right)\omega_0}{Q} \qquad \textbf{(3.4.6)}$$

Podle hodnoty initele jakosti *Q* mžeme provést následující dlení (pro jednoduchost volíme pro všechny pípady stejný kmitoet $\omega_0 = 1000$, aniž bychom se dopustili jakéhokoliv omezení obecnosti).

1. Pro ***Q* < *1/2***, resp. $\xi > 1$ dostaneme dva rzné reálné póly, pro nž má impulzní charakteristika níže uvedený tvar a prbh. Pokud bychom chtli použít vyjádení pomocí výše uvedených parametr *Q* a ω_0 pro charakterizaci dvou rzných pól ležících na záporné réálné ose, lze to

uinit následovn:




```
> Q1:=1/10;
  xi=1/(2*Q1);
  omega[0]=1000;
  'p12'=evalf(subs({Q=Q1,omega[0]=1000},[p12]));
  Pt1:=evalf(subs({K=1000^2,p1=subs({Q=Q1,omega[0]=1000},[p12])
  [1],p2=subs({Q=Q1,omega[0]=1000},[p12])[2]},Pt));
  plot(Pt1,t=0..0.05,title=`Impulzní charakteristika`,
  labelfont=[HELVETICA],axesfont=[HELVETICA,8],thickness=2);
```

$$Q1 := \frac{1}{10}$$

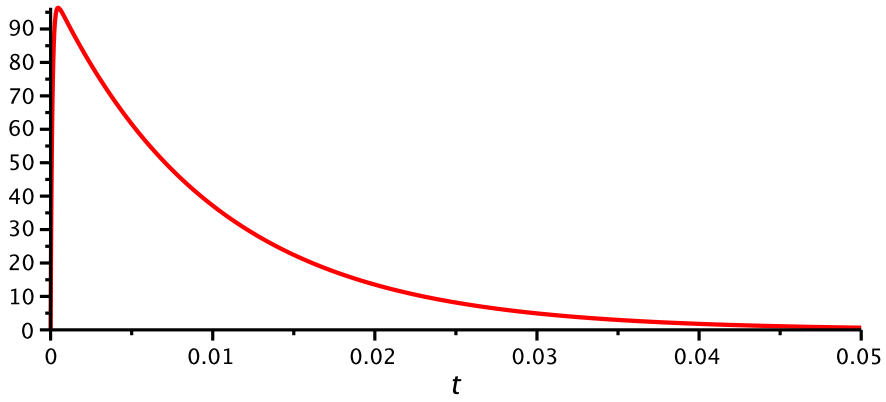
$$\xi = 5$$

$$\omega_0 = 1000$$

$$p12 = [-101.020514,\ -9898.979486]$$

$$Pt1 := -102.0620726\, e^{-9898.979486\, t} + 102.0620726\, e^{-101.020514\, t}$$

Impulzní charakteristika



2. Pro ***Q = 1/2***, resp. **ξ = 1** dostaneme dva stejné reálné póly (dvojnásobný pól), pro nž má impulzní charakteristika následující tvar a prbh. Pro tento pípad však musíme nejprve pepotat obecný vztah pro asovou odezvu *Pt* z upraveného vztahu pro penos. asová odezva

práv ješt nevykazuje kmitavou odezvu, modulová charakteristika práv nebude vykazovat pekmit a pokles chrakteristiky v bod zlomu je 6 dB.

```
> P2:=subs(p2=p1,P);
  Pt2:=invlaplace(P2, p, t);
  Q2:=1/2;
  xi=1/(2*Q2);
  omega[0]=1000;
  'p12'=evalf(subs({Q=Q2,omega[0]=1000},[p12]));
  Pt2:=evalf(subs({K=1000^2,p1=subs({Q=Q2,omega[0]=1000},[p12])
  [1],p2=subs({Q=Q2,omega[0]=1000},[p12])[2]},Pt2));
  plot(Pt2,t=0..0.05,title=`Impulzní charakteristika`,
  labelfont=[HELVETICA],axesfont=[HELVETICA,8],thickness=2);
```

$$P2 := \frac{K}{(p - p1)^2}$$

$$Pt2 := K\, t\, e^{p1\, t}$$

$$Q2 := \frac{1}{2}$$

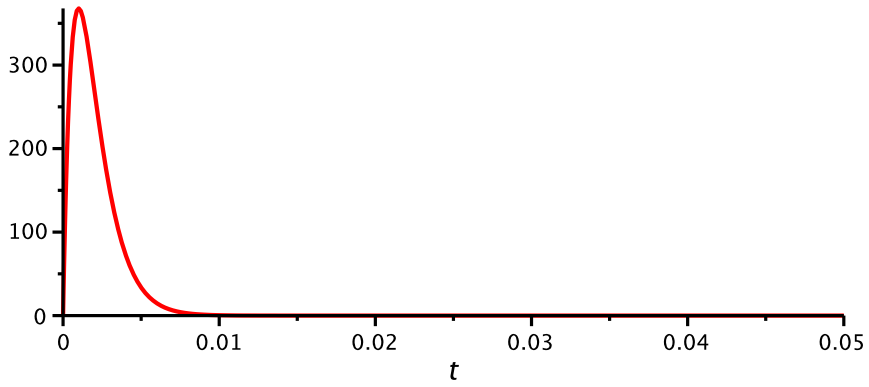
$$\xi = 1$$

$$\omega_0 = 1000$$

$$p12 = [-1000.,\ -1000.]$$

$$Pt2 := 1.000000\ 10^6\, t\, e^{-1000.\, t}$$

Impulzní charakteristika



3. Pro $Q > 1/2$, resp. $\xi < 1$ dostaneme dva komplexn sdružené póly se zápornou reálnou ástí, pro nž má impulzní charakteristika kmitavý, harmonický, tlumený prbh. Jak rychle se tato kmitavá odezva utlumí, záleží na velikosti initele tlumení, resp. na hodnot initele jakosti Q. Je samozejmé, že se pi mnící hodnot q, bude mnit i tvar píslušné modulové charakteristiky (pi vzrstajícím Q se bude zvtšovat i velikost "pekmitu" na modulvé charakteristice). Zde je nutné ješt rozlišovat nkolik pípad.

- $> \frac{1}{2} < \left(Q < \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ Tehdy je $\sigma_n > \omega_n$ a tlumení je ešt velké $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} < \xi < 1 \right)$, že se signál prakticky díve utlumí, než dojde k periodickým kmitm (vzniká jeden až dva pekmity). Na tomto píklad je velmi dobe vidt dvod a výhody definice initele jakosti, který udává "velikost tlumení" relativn k délce period vlastních kmit, oproti absolutnímu initeli tlumení, který je vztažen pouze k asu *t*. Modulová charakteristika nebude ešt vykazovat pekmit.

- $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ Toto je zvláštní pípad, kdy $\sigma_n = \omega_n$, resp. $Q = \xi$ Impulzní charakteristika je sice mén tlumena než v pedchozím pípad. Tlumení je však stále velké ($\xi = Q$), takže opt dojde jen k jednomu, dvma pekmitm. Modulová charakteristika ešt nebude vykazovat pekmit a pokles chrakteristiky v bod zlomu je 3dB. Jedná se o tzv. **Maximáln plochou modulovou chrakteristiku**.

- $\frac{1}{\sqrt{2}} < (Q < \infty)$ Tehdy je $\sigma_n < \omega_n$ a tlumení je již malé natolik $\left(0 < \xi < \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$, že je na impulzní charakteristice zeteln vidt pítomnost harmonické složky. Modulová charakteristika bude vykazovat pekmit, tak jak bylo ukázáno výše.

$$\frac{1}{2} < \left(Q < \frac{1}{2}\sqrt{2} \right)$$

$$Q = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} < (Q < \infty) \qquad \textbf{(3.4.7)}$$

Nyní následují ukázky k jednotlivým bodm.

```
> Q3a:=0.6;
  xi=1/(2*Q3a);
  omega[0]=1000;
  'p12'=evalf(subs({Q=Q3a,omega[0]=1000},[p12]));
  Pt3a:=evalc(subs({K=1000^2,p1=subs({Q=Q3a,omega[0]=1000},
  [p12])[1],p2=subs({Q=Q3a,omega[0]=1000},[p12])[2]},Pt));
  plot(Pt3a,t=0..0.05,title=`Impulzní charakteristika`,
  labelfont=[HELVETICA],axesfont=[HELVETICA,8],thickness=2);
```

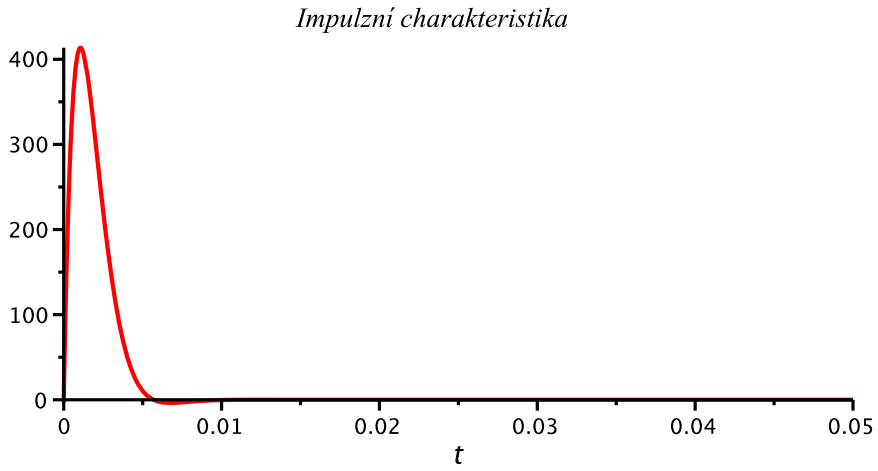
$$Q3a := 0.6$$

$$\xi = 0.8333333335$$

$$\omega_0 = 1000$$

$$p12 = [-833.3333335 + 552.7707985\ I,\ -833.3333335 - 552.7707985\ I]$$

$$Pt3a := 1809.068067\ e^{-833.3333335\,t} \sin(552.7707985\,t)$$




```
> Q3b:=1/sqrt(2);
  xi=1/(2*Q3b);
  omega[0]=1000;
  'p12'=evalf(subs({Q=Q3b,omega[0]=1000},[p12]));
  Pt3b:=evalf(evalc(subs({K=1000^2,p1=subs({Q=Q3b,omega[0]=
  1000},[p12])[1],p2=subs({Q=Q3b,omega[0]=1000},[p12])[2]},Pt))
  );
  plot(Pt3b,t=0..0.05,title=`Impulzní charakteristika`,
  labelfont=[HELVETICA],axesfont=[HELVETICA,8],thickness=2);
```

$$Q3b := \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

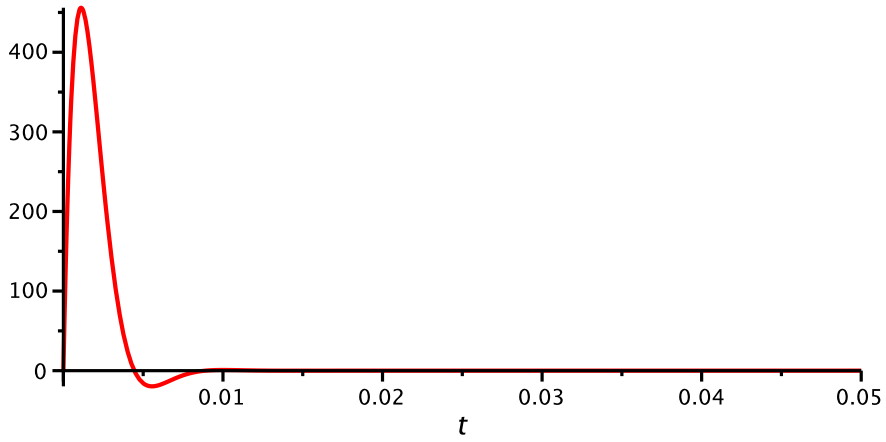
$$\xi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\omega_0 = 1000$$

$$p12 = [-707.1067810 + 707.1067810\ I,\ -707.1067810 - 707.1067810\ I]$$

$$Pt3b := 1414.213562\ e^{-707.1067810\,t}\sin(707.1067810\,t)$$

Impulzní charakteristika

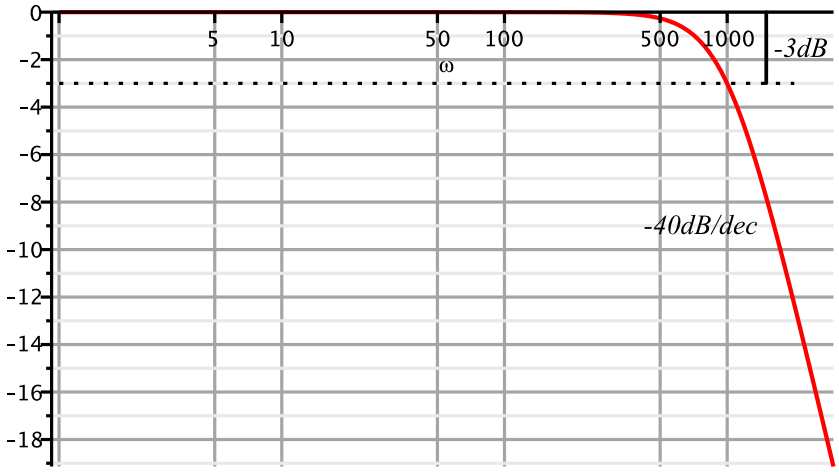


Pro tento pípad ukážeme navíc odpovídající prbh modulové chrakteristiky penosu - maximáln ploché.

```
> Pf:=evalc(abs(subs({Q=Q3b,omega[0]=1000,K=1000^2,p=I*omega},
  Pq)));
  pl:=semilogplot(20*log10(Pf),omega=1..3000,thickness=3,title=
  `Maximáln plochá charakteristika`,labelfont=[HELVETICA,8],
  axesfont=[HELVETICA,8],thickness=2,gridlines=true):
  t1 := textplot([1500,-1.5,`-3dB`],align=RIGHT):
  t2 := textplot([1500,-9,`-40dB/dec`],align=LEFT):
  l:=line([1,-3],[2000,-3],color=black,linestyle=2):
  v1:=arrow([1500,0], [1500,-3], 2, 2, .2, color=black):
  v2:=arrow([1500,-3], [1500,0], 2, 1, .3, color=black):
  display(pl,l,t1,v1,v2,t2);
```

$$Pf := \frac{1000000}{\sqrt{\omega^4 + 1000000000000}}$$

Maximálně plochá charakteristika




```
> Q3c:=5;
  xi=1/(2*Q3b);
  omega[0]=1000;
  'p12'=evalf(subs({Q=Q3c,omega[0]=1000},[p12]));
  Pt3c:=evalf(evalc(subs({K=1000^2,p1=subs({Q=Q3c,omega[0]=
  1000},[p12])[1],p2=subs({Q=Q3c,omega[0]=1000},[p12])[2]},Pt))
  );
  plot(Pt3c,t=0..0.05,title=`Impulzní charakteristika`,
  labelfont=[HELVETICA],axesfont=[HELVETICA,8],thickness=2);
```

$$Q3c := 5$$

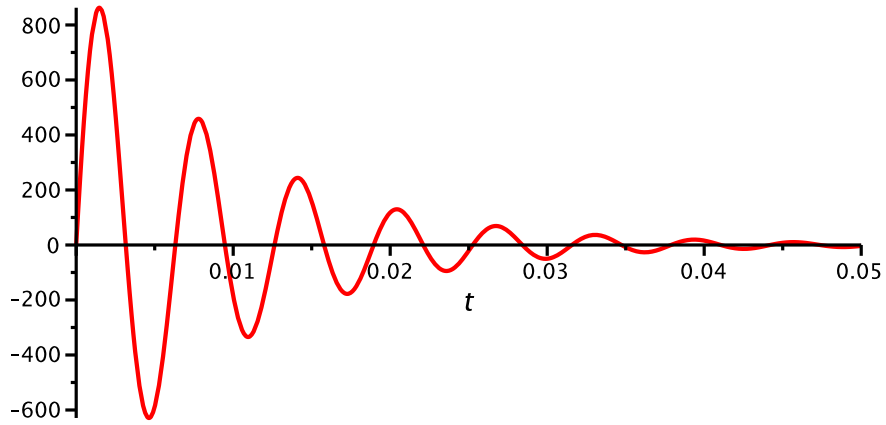
$$\xi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\omega_0 = 1000$$

$$p12 = [-100. + 994.9874371\ I,\ -100. - 994.9874371\ I]$$

$$Pt3c := 1005.037815\ e^{-100.\,t} \sin(994.9874371\ t)$$

Impulzní charakteristika



Dkaz uvedených skuteností

Nejdíve nahradíme do vztahu pro penos *výraz* ωl_p za ω_p - pro výpoty je nutné rozlišit ω_p a ω (ω_p je jen p-tá položka promnné ω).

```
> Pk1:=K/expand(subs({p1=sigma[p]+I*omega1[p],p2=sigma[p]-I*
  omega1[p]},denom(P)));
```

$$Pk1 := \frac{K}{p^2 - 2\,p\,\sigma_p + \sigma_p^2 + \omega l_p^2} \qquad \textbf{(3.4.1.1)}$$

dosadíme za $p = I\,\omega$ a vypoteme absolutni hodnotu prenosu (zde a v následujících výpotech je problém v tom, že pi dosazení za p se dosadí i ve výrazech σ_p a ω_p - ešení je pejít od komplexního kmitotu v promnné *p* k promnné *s*)

```
> abs_Pk:=evalc(abs(K/expand(subs({p=I*omega,p1=sigma[p]+I*
  omega1[p],p2=sigma[p]-I*omega1[p]},denom(P)))));
```

$$abs_Pk := \left(\frac{K^2 \left(-\omega^2 + \sigma_p^2 + \omega l_p^2 \right)^2}{\left(\left(-\omega^2 + \sigma_p^2 + \omega l_p^2 \right)^2 + 4\,\omega^2\,\sigma_p^2 \right)^2} + \frac{4\,K^2\,\omega^2\,\sigma_p^2}{\left(\left(-\omega^2 + \sigma_p^2 + \omega l_p^2 \right)^2 + 4\,\omega^2\,\sigma_p^2 \right)^2} \right)^{1/2} \qquad \textbf{(3.4.1.2)}$$

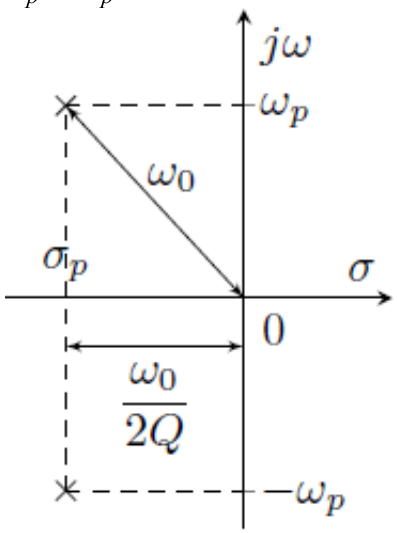
a hledáme maximum funkce abs_Pks -- ešíme následující rovnici

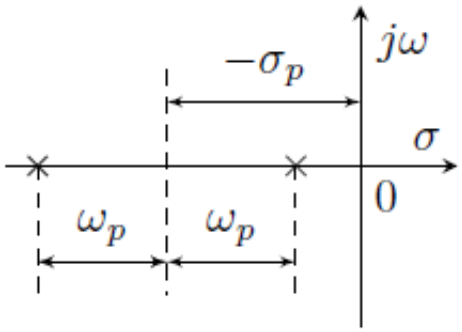
```
> Diff('abs_Pk',omega)=0;
  reseni:=solve(diff(abs_Pk,omega),omega);
```

$$\frac{\partial}{\partial \omega}\, abs_Pk = 0$$

$$reseni := 0, \sqrt{\omega l_p^2 - \sigma_p^2}, -\sqrt{\omega l_p^2 - \sigma_p^2}, \sqrt{\omega l_p^2 - \sigma_p^2 + 2\,I\,\omega l_p\,\sigma_p},$$
$$-\sqrt{\omega l_p^2 - \sigma_p^2 + 2\,I\,\omega l_p\,\sigma_p}, \sqrt{\omega l_p^2 - \sigma_p^2 - 2\,I\,\omega l_p\,\sigma_p},$$
$$-\sqrt{\omega l_p^2 - \sigma_p^2 - 2\,I\,\omega l_p\,\sigma_p} \qquad \textbf{(3.4.1.3)}$$

Derivace je nulová samozejm v bod $\omega = 0$, a dále pro kmitoet $\omega_r = \sqrt{-\sigma_p^2 + \omega_p^2}$, pro který nastává maximum na modulové charakteristice (záporné a komplexní kmitoty samozejm nelze uvažovat). Tento kmitoet nazvme ω_r. Z jeho vyjádení lze vyíst, že "pekmit" na modulové chrakteristice nastává pouze pro $\sigma_p < \omega_p$, $\left(\xi < \frac{1}{\sqrt{2}} < Q\right)$. Jeli $\sigma_p = 0$, jedná se o pípad ist imaginárních koen a kmitoet vlastních kmit , ω_p se rovná zlomovému kmitotu ω_0. O zlomovém kmitotu však v tomto pípad nelze hovoit - jde o systém na mezi stability, jak je ukázáno dále (tvrtý pípad). ím více se hodnota ω_p bliží hodnot σ_p vzdaluje se ω_r od zlomového kmitotu ω_0 smrem k bodu $\omega = 0$ "a pekmit se zmenšuje". Je-li $\sigma_p = \omega_p$, $\left(Q = \frac{1}{\sqrt{2}} = \xi\right)$ pekmit zaniká ($\omega_r = 0$) a to je práv pípad maximáln ploché charakteristiky. Jestliže je $\omega_p < \sigma_p$, $\left(Q < \frac{1}{\sqrt{2}} < \xi\right)$ nelze o extrému hovoit, jelokož nastává na komplexním (nereálném) kmitotu. To si mže zvídavý tená ovit na pomocí 3D grafu. To je také pípad dvojice reálných koen, kdy platí vždy $\omega_p < \sigma_p$ (viz pravou ást nártu).



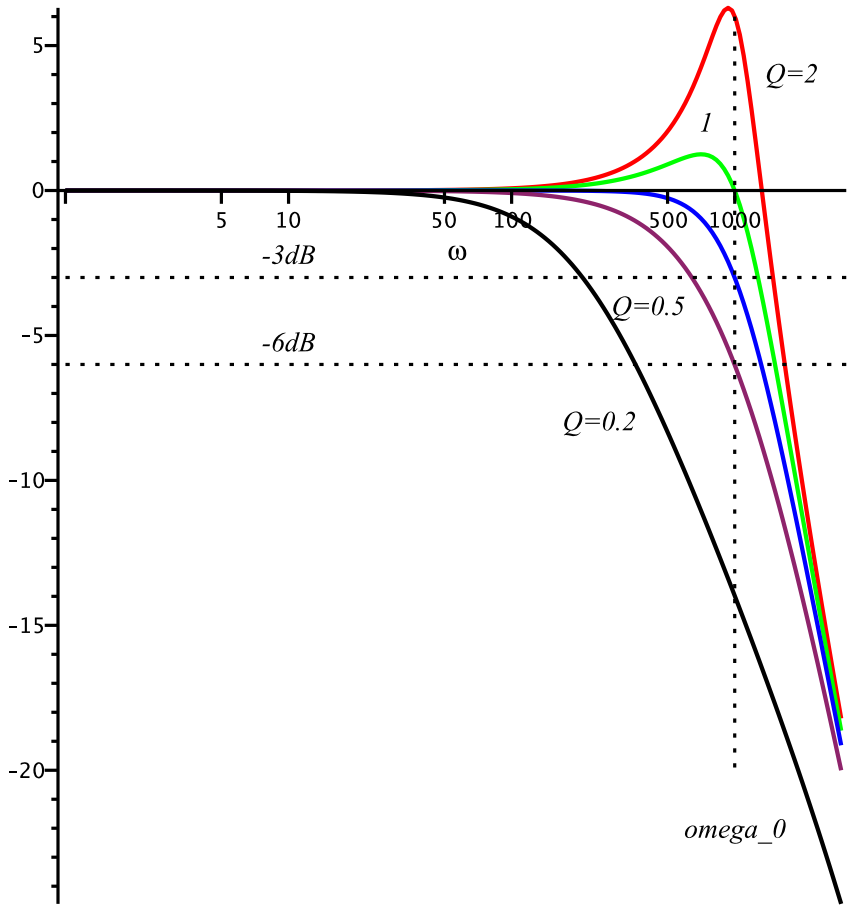



```
> modul1:=evalc(abs(subs({Q=2,omega[0]=1000,K=1000000,p=I*
  omega},Pq))):
  modul2:=evalc(abs(subs({Q=1,omega[0]=1000,K=1000000,p=I*
```

```
omega},Pq))):
modul3:=evalc(abs(subs({Q=1/sqrt(2),omega[0]=1000,K=
1000000,p=I*omega},Pq))):
modul4:=evalc(abs(subs({Q=0.5,omega[0]=1000,K=1000000,p=I*
omega},Pq))):
modul5:=evalc(abs(subs({Q=0.2,omega[0]=1000,K=1000000,p=I*
omega},Pq))):
pl1:=semilogplot(20*log10(modul1),omega=1..3000,thickness=
2,labelfont=[HELVETICA],axesfont=[HELVETICA,8],color=red):

pl2:=semilogplot(20*log10(modul2),omega=1..3000,thickness=
2,labelfont=[HELVETICA],axesfont=[HELVETICA,8],color=
green):
pl3:=semilogplot(20*log10(modul3),omega=1..3000,thickness=
2,labelfont=[HELVETICA],axesfont=[HELVETICA,8],color=blue)
:
pl4:=semilogplot(20*log10(modul4),omega=1..3000,thickness=
2,labelfont=[HELVETICA],axesfont=[HELVETICA,8],color=
maroon):
pl5:=semilogplot(20*log10(modul5),omega=1..3000,thickness=
2,title=`Modulová charakteristika pro Q=2, 1, 0.707, 0.5 a
0.2, resp. xi=0.25, 0.5, 0.707, 1, 2.5`,labelfont=
[HELVETICA],axesfont=[HELVETICA,8],color=black):
t1 := textplot([10^3,-22,`omega_0`]):
t2 := textplot([10^2.6,-8,`Q=0.2`],align=LEFT):
t3 := textplot([10^2.82,-4,`Q=0.5`],align=LEFT):
t4 := textplot([10^2.87,2.3,`1`]):
t5 := textplot([10^3.1,4,`Q=2`],align=RIGHT):
t6 := textplot([10^1,-2.8,`-3dB`],align=ABOVE):
t7 := textplot([10^1,-5.8,`-6dB`],align=ABOVE):
l1:=line([10^3,6],[10^3,-20],color=black,linestyle=2):
l2:=line([10^0,-3],[10^3.5,-3],color=black,linestyle=2):
l3:=line([10^0,-6],[10^3.5,-6],color=black,linestyle=2):
display(pl1,pl2,pl3,pl4,pl5,l1,l2,l3,t1,t2,t3,t4,t5,t6,t7)
;
```

Modulová charakteristika pro Q=2, 1, 0.707, 0.5 a 0.2, resp. xi=0.25, 0.5, 0.707, 1, 2.5

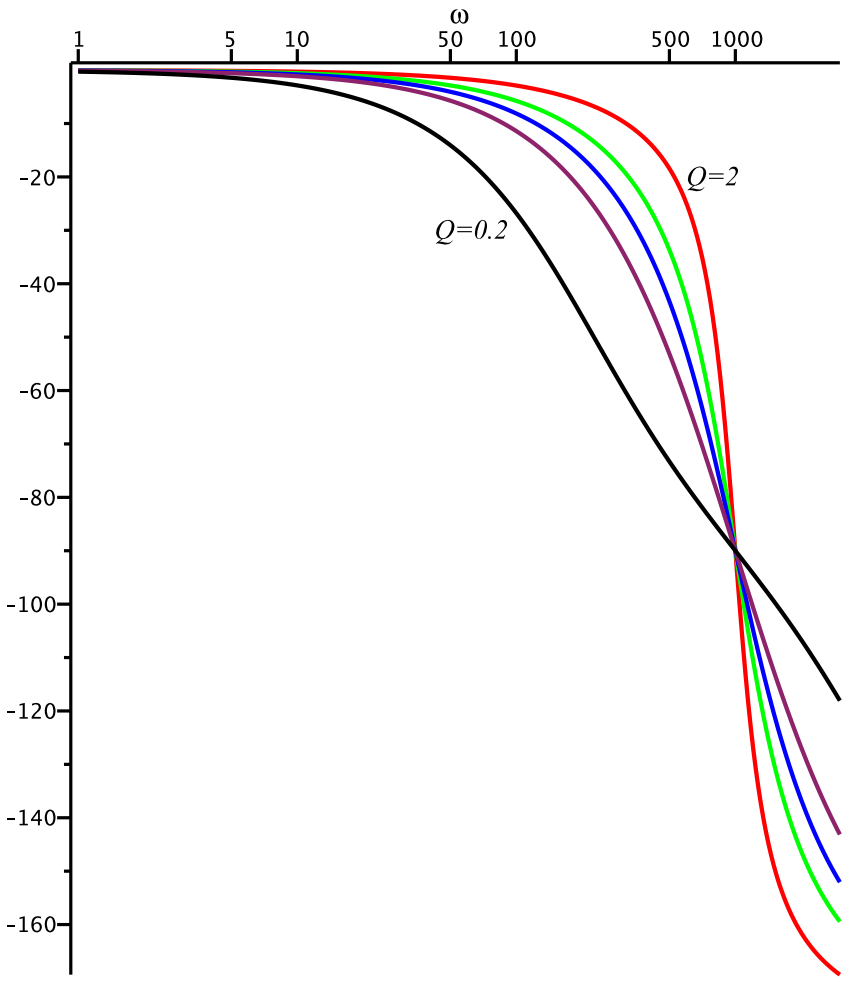



```
> faze1:=evalc(argument(subs({Q=2,omega[0]=1000,K=1000000,p=
  I*omega},Pq))):
  faze2:=evalc(argument(subs({Q=1,omega[0]=1000,K=1000000,p=
  I*omega},Pq))):
  faze3:=evalc(argument(subs({Q=1/sqrt(2),omega[0]=1000,K=
  1000000,p=I*omega},Pq))):
  faze4:=evalc(argument(subs({Q=0.5,omega[0]=1000,K=1000000,
  p=I*omega},Pq))):
  faze5:=evalc(argument(subs({Q=0.2,omega[0]=1000,K=1000000,
  p=I*omega},Pq))):
  ph1:=semilogplot(180/Pi*faze1,omega=1..3000,thickness=2,
  numpoints=300,labelfont=[HELVETICA],axesfont=[HELVETICA,
  8],color=red):
```

```
ph2:=semilogplot(180/Pi*faze2,omega=1..3000,thickness=2,
numpoints=300,labelfont=[HELVETICA],axesfont=[HELVETICA,
8],color=green):
ph3:=semilogplot(180/Pi*faze3,omega=1..3000,thickness=2,
numpoints=300,labelfont=[HELVETICA],axesfont=[HELVETICA,
8],color=blue):
ph4:=semilogplot(180/Pi*faze4,omega=1..3000,thickness=2,
numpoints=300,labelfont=[HELVETICA],axesfont=[HELVETICA,
8],color=maroon):
ph5:=semilogplot(180/Pi*faze5,omega=1..3000,thickness=2,
numpoints=300,title=`Fázová charakteristika pro Q=2, 1,
0.707, 0.5 a 0.2, resp. xi=0.25, 0.5, 0.707, 1, 2.5`,
labelfont=[HELVETICA],axesfont=[HELVETICA,8],color=black):

t1 := textplot([10^2.9,-20,`Q=2`]):
t2 := textplot([10^1.8,-30,`Q=0.2`]):
display(ph1,ph2,ph3,ph4,ph5,t1,t2);
```

Fázová charakteristika pro Q=2, 1, 0.707, 0.5 a 0.2, resp. xi=0.25, 0.5, 0.707, 1, 2.5



Pro úplnost ukážeme odpovídající pechodové charakteristiky (odezvu na jednotkový skok).

```
> Ptp:=invlaplace(Pq/p,p,t):
> Ptp1:=subs({Q=2,omega[0]=1000,K=1000000},Ptp):
  Ptp2:=subs({Q=1,omega[0]=1000,K=1000000},Ptp):
  Ptp3:=subs({Q=1/sqrt(2),omega[0]=1000,K=1000000},Ptp):
  Ptp4:=subs({Q=0.5,omega[0]=1000,K=1000000},Ptp):
  Ptp5:=subs({Q=0.2,omega[0]=1000,K=1000000},Ptp):
> Ptpi:=eval([seq(parse(cat("Ptp",i)),i=1..5)]);
```

$$Ptpi := \left[1 + \frac{1}{15000}\, e^{-250\,t}\left(-15000\cosh\left(\frac{1}{4}\,t\sqrt{-15000000}\right)\right.\right. \qquad \textbf{(3.4.1.4)}$$

$$+\sqrt{-15000000}\,\sinh\left(\frac{1}{4}\,t\sqrt{-15000000}\right)\Big),\ 1+\frac{1}{3000}\,e^{-500\,t}\Big($$

$$-3000\cosh\left(\frac{1}{2}\,t\sqrt{-3000000}\right)+\sqrt{-3000000}\,\sinh\left(\frac{1}{2}\,t\sqrt{-3000000}\right)\Big),\ 1$$

$$+\frac{1}{1000}\,e^{-500\sqrt{2}\,t}\left(-1000\cosh\left(\frac{1}{2}\,t\sqrt{2}\,\sqrt{-1000000}\right)\right.$$

$$\left.+\sqrt{-1000000}\,\sinh\left(\frac{1}{2}\,t\sqrt{2}\,\sqrt{-1000000}\right)\right),\ 1$$

$$+Float(undefined)\,e^{-1000.000000\,t},\ 1$$

$$-0.001190476190\,e^{-2500.000000\,t}\,(840.00\cosh(2291.287848\,t)$$

$$+916.5151390\sinh(2291.287848\,t))\,]$$

Pozor, pro $Q=\frac{1}{2}$ (dvojnásobný pól) je nutné vypoítat odezvu korektn (znova, tak, jako bylo uvedeno i výše).

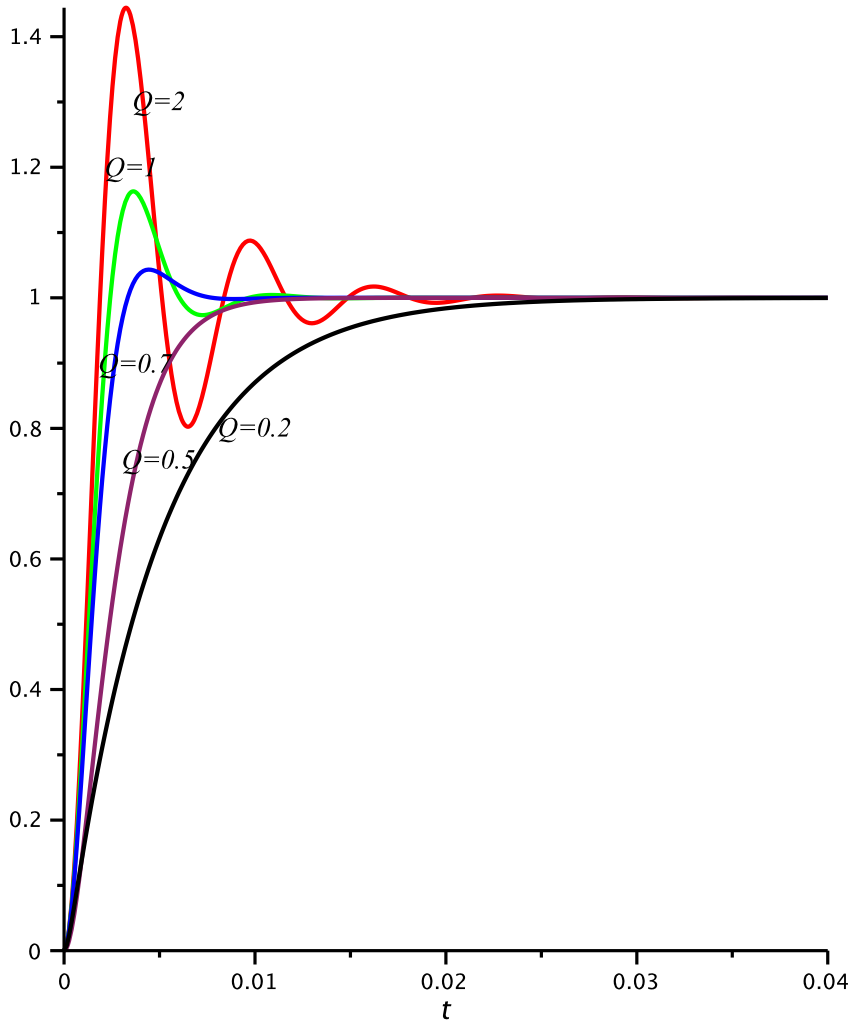
```
> Ptp4;
  Ptpi[4]:=subs({p1=-1000/sqrt(2),K=1000000/2},invlaplace
  (P2/p, p, t));
```

$$1+Float(undefined)\,e^{-1000.000000\,t}$$

$$Ptpi_4 := 1+e^{-500\sqrt{2}\,t}\left(-500\sqrt{2}\,t-1\right) \qquad \textbf{(3.4.1.5)}$$

```
> plt:=plot(Ptpi,t=0..0.04,thickness=2,numpoints=300,title=
  `Fázová charakteristika pro Q=2, 1, 0.707, 0.5 a 0.2,
  resp. xi=0.25, 0.5, 0.707, 1, 2.5`,labelfont=[HELVETICA],
  axesfont=[HELVETICA,8],color=[red,green,blue,maroon,black]
  ):
  t1 := textplot([0.005,1.3,`Q=2`]):t2 := textplot([0.0035,
  1.2,`Q=1`]):t3 := textplot([0.0037,0.9,`Q=0.7`]):t4 :=
  textplot([0.005,0.75,`Q=0.5`]):t5 := textplot([0.01,0.8,
  `Q=0.2`]):
  display(plt,t1,t2,t3,t4,t5);
```

Fázová charakteristika pro Q=2, 1, 0.707, 0.5 a 0.2, resp. xi=0.25, 0.5, 0.707, 1, 2.5



Pro pípad $\sigma_p = \omega_p$ si ještě ovíme polohu zlomového kmitotu a velikost poklesu modulové charakteristiky pro tento kmitoet.

```
> Pk;
```

$$\frac{K}{p^2 - 2\,p\,\sigma_p + \sigma_p^2 + \omega_p^2} \qquad \textbf{(3.4.1.6)}$$

Dosadíme do jmenovatele penosu $\sigma_p = \omega_p$ a nalezneme póly penosu.

```
> omega0:=solve(subs(sigma[p]=omega[p],denom(Pk)),p);
```

$$\omega 0 := (1 + \mathrm{I})\,\omega_p,\ (1 - \mathrm{I})\,\omega_p \qquad \textbf{(3.4.1.7)}$$

Póly musí být komplexn združené a jejich velikost musí být rovna $\omega_0 = \sqrt{\sigma_p^2 + \omega_p^2}$, což pro náš pípad vyjde.

```
> omega0_abs:=abs(omega0[1]);
```

$$omega0_abs := \sqrt{2}\,\left|\omega_p\right| \qquad \textbf{(3.4.1.8)}$$

Nyní vypoteme absolutní hodnotu penosu pro $\omega = \omega_0$ a pro $\sigma_p = \omega_p$. Abychom dostali požadovaný výsledek, je nutno opt zavést pedpoklad $0 < \omega_p$.

```
> Pko:=abs(K/expand(subs({p=I*omega0_abs,p1=omega[p]+I*omega
  [p],p2=omega[p]-I*omega[p]},denom(P))));
  Pkn:=simplify(Pko) assuming omega[p]>0;
```

$$Pko := \left| \frac{K}{-2\left|\omega_p\right|^2 - 2\,I\sqrt{2}\,\left|\omega_p\right|\,\omega_p + 2\,\omega_p^2} \right|$$

$$Pkn := \frac{1}{4}\,\frac{\sqrt{2}\,|K|}{\omega_p^2} \qquad \textbf{(3.4.1.9)}$$

Dále vypoteme hodnotu penosu pro nulový kmitoet - "asyptotická" hodnota penosu.

```
> Pk0:=abs(Limit(Pk,p=0)); Pk0:=subs({omega[0]=omega[p],
  sigma[0]=sigma[p]},value(Pk0));
```

$$Pk0 := \left| \lim_{p \to 0} \frac{K}{p^2 - 2\,p\,\sigma_p + \sigma_p^2 + \omega_p^2} \right|$$

$$Pk0 := \left| \frac{K}{\sigma_p^2 + \omega_p^2} \right| \qquad \textbf{(3.4.1.10)}$$

Nyní již lze urit pokles penosu ve zlomovém kmitotu a pi $\sigma_p = \omega_p$.

```
> 'Pkn/Pk0'=simplify(Pkn/subs(sigma[p]=omega[p],Pk0))
  assuming omega[p]>0;
  'Pkn/Pk0'=evalf(20*log10(rhs(%)));        # pokles v [dB]
```

$$\frac{1}{4}\,\frac{\sqrt{2}\,|K|}{\omega_p^2\left|\frac{K}{\sigma_p^2 + \omega_p^2}\right|} = \frac{1}{2}\,\sqrt{2}$$

$$\frac{Pkn}{Pk0} = -3.010299958 \qquad \textbf{(3.4.1.11)}$$

Což je výsledek který již známe z prbhu maximáln ploché modulové charakteristiky. Podíl skuteného modulu pi zlomovém kmitotu a jeho "asymptotické" hodnoty je také roven initeli jakosti, jak bylo výše uvedeno. Tuto skutenost lze jednoduše dokázat i pro obecný pípad.

```
> Pq;
```

(3.4.1.12)

$$\frac{K}{p^2 + \frac{p\,\omega_0}{Q} + \omega_0^2} \qquad \textbf{(3.4.1.12)}$$

Dosame za $\omega = \omega_0$ (zlomový kmitoet) do výrazu pro modul penosu.

```
> Pkz:=abs(subs(p=I*omega[0],Pq));
```

$$Pkz := \left| \frac{K\,Q}{\omega_0^2} \right| \qquad \textbf{(3.4.1.13)}$$

Tuto hodnotu vydlme "asymtotickou" hodnotou penosu a dostaneme:

```
> 'Pkz/Pk0'=simplify(subs(omega[0]=sqrt(sigma[p]^2+omega[p]
  ^2),Pkz)/Pk0);
```

$$\frac{Pkz}{Pk0} = |Q| \qquad \textbf{(3.4.1.14)}$$

Jelikož je $0 < Q$, je to dkaz našeho tvrzení. Nyní následuje dokonení výkladu.

Extrémním pípadem je pípad ryze imaginárních koen, jak bylo ukázáno výše a v tomto dlení je to následující pípad -- tvrtý.

4. Pro $Q = \infty$ dostaneme dva komplexn sdružené, ryze imaginární póly (s nuvou reálnou ástí), pro nž má impulzní charakteristika následující tvar a prbh.

```
> Q4:=infinity;
  xi=0;
  omega[0]=1000;
  'p12'=[limit(subs(omega[0]=1000,p12[1]),Q=Q4),limit(subs
  (omega[0]=1000,p12[2]),Q=Q4)];
  Pt4:=evalf(evalc(subs({K=1000^2,p1=rhs(%)[1],p2=rhs(%)[2]},
  Pt)));
  plot(Pt4,t=0..0.05,title=`Impulzní charakteristika`,
  labelfont=[HELVETICA],axesfont=[HELVETICA,8],thickness=2);
```

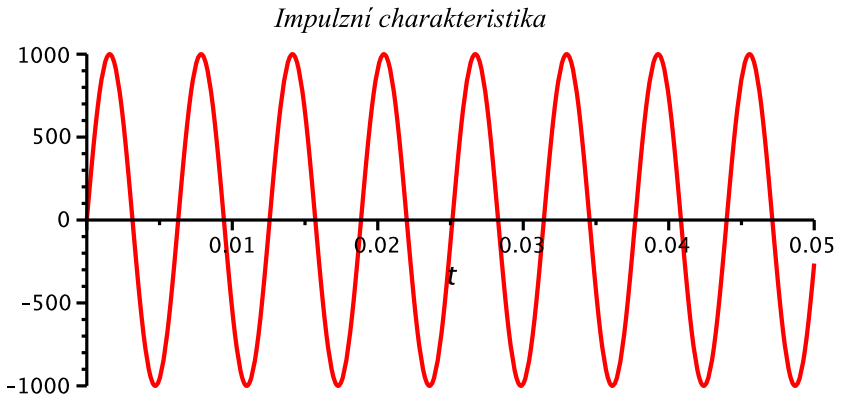
$$Q4 := \infty$$

$$\xi = 0$$

$$\omega_0 = 1000$$

$$p12 = [1000\,I,\ -1000\,I]$$

$$Pt4 := 1000.\,\sin(1000.\,t)$$



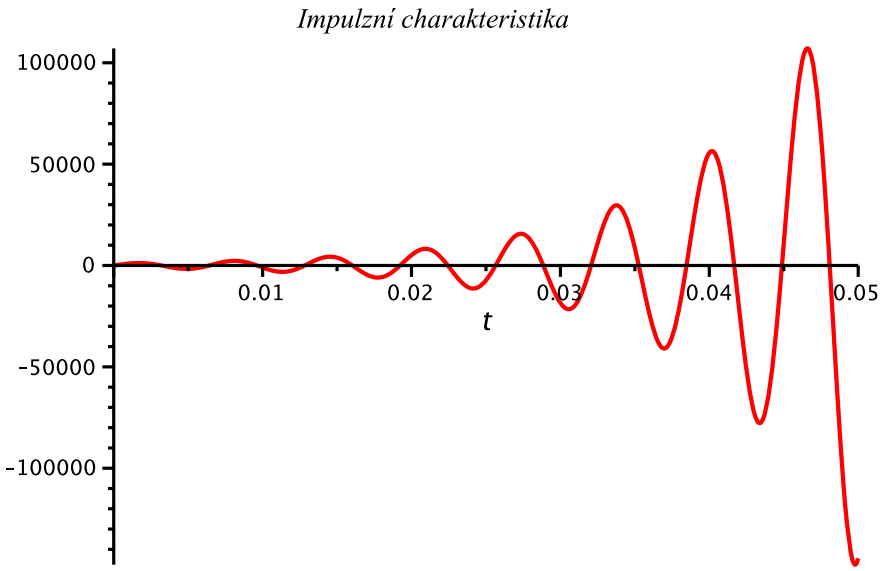
Námt ke zpracování: Realizujte jednotlivé pípady realizovat (poetn) sériovým rezonanním obvodem RLC podle výše uvedeného obrázku.

5. Posledním, i když teoretickým pípadem je pípad komplexn sdružených koen s kladnou reálnou ástí. V tomto pípad nejde o stabilní systém, tudíž už nehovoíme o initeli jakosti (ten by byl stejn jako initel tlumení záporný). Pro námi zvolené hodnoty koen dostaneme:

```
> 'p12'=100+I*980,100-I*980;
  Pt5:=evalf(evalc(subs({K=1000^2,p1=100+I*980,p2=100-I*980},
  Pt)));
  plot(Pt5,t=0..0.05,title=`Impulzní charakteristika`,
  labelfont=[HELVETICA],axesfont=[HELVETICA,8],thickness=2);
```

$$p12 = 100 + 980\,\mathrm{I},\ 100 - 980\,\mathrm{I}$$

$$Pt5 := 1020.408163\ \mathrm{e}^{100.\,t}\ \sin(980.\,t)$$



Systém s takovouto odezvou (jdoucí nade všechny meze) nelze, jak již bylo eeno, v praxi realizovat. Je nutné poznamenat, že nelze realizovat ani "istý" systém s ryze imaginárními

koeny, protože nelze v praxi tuto podmínku u "lineárních" systém udržet vlivem fluktuace parametr souástek. Proto je nutné tuto podmínku pro oscilující systémy zajistit, nejastji pomocí nelineární zptné vazby (stabilizace amlitudy). Výstupní signál je potom "tém" harmonický (s malým zkreslením). Bez této zptné vazby by se systém ustálil vlivem vlastní nelilearity, nap. vlivem koneného napájecího naptí, a tvar kmit by byl siln neharmonický (relaxaní kmity).

Toto jsou samozejm oddlené jednoduché pípady. Jsou to však všechny možné pípady, které u reálných penos lineárních nebo linearizovaných soustav nastávají. Ve složitjších pípadech lze výraz pro modul penosu rozdlit na souin takovýchto jednoduchých tvar a jelikož modul je logaritmem absolutní hodnoty tohoto souinu, resp. logaritmem souinu jednotlivých absolutních hodnot, lze jejich známé vlastnosti jednoduše spojovat (sítat). Podobn tomu je i pro fázi. Výsledná fáze je soutem fází jednotlivých ástí penosu (zde se násobí exponenciely fází, tj. exponenty = fáze se sítají. "Sítání platí i pro asové odezvy. Složitjší výraz pro penos, vyjádený racionáln lomenou funkcí lze rozdlit na souet koenových initel a na ty pak lze aplikovat výše uvedené metody.

Nuly (a póly) penosových funkcí

U penosových funkcí obsahujících nuly penosu, je nutné si uvdimit jednu dležitou skutenost. **Penosová funkce se totiž nemže skládat pouze z jedné nebo více nul, ale vždy musí mít i odpovídající poet pól penosu, resp. je-li penosová funkce ve tvaru racionáln lomenné funkce musí být být stupe itatele nižší než stupe jmenovatele.**
Vysvtlení lze podat dvma zpsoby:

- Penosová funkce $F(p)$ jakéhokoliv reálného obvodu se bude jist pro velmi vysoké kmitoty blížit nule, tj, provedeme-li substituci $p = I\omega$, musí platit $\lim_{\omega \to \infty} F(I\omega) = 0$. To bude však platit práv pro výše uvedenou vlastnost penosu.
- Druhé vysvtlení je ist matematické: *Nutná a postaující podmínka pro to, aby racionální lomená funkce $F(p)$ byla obrazem funkce sdandartního typu je, tato: Stupe itatele je nižší než stupe jmenovatele.* (Musí také platit První vta o limit $\lim_{p \to \infty} F(p) = 0$, kde $F(p)$ je obraz pedmtu $f(t)$ standardního typu, resp. kdyby tato limita neplatila, nebude $f(t)$ standardního typu). Dkaz této vty není pedmtem našeho zájmu, tudíž se jím nebudem zabývat. Lze ho však nalézt nap. v [LT], (viz také odezva.mws).

Pokusíme-li se pesto najít pedmt nap. funkce 1. Víme, že pedmtem je Diracova funkce, tj. není funkce standardního typu (není to také reálný signál).

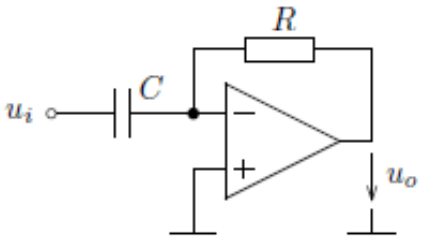
```
> invlaplace(1,p,t);
```

$$\mathrm{Dirac}(t) \tag{2}$$

```
> Int(Dirac(t),t = -infinity..infinity):%=value(%);
```

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Dirac}(t)\, dt = 1 \tag{3}$$

Obvodem, jež v ideálním pípad nebude mít žádný pól kmitotov závislého penosu, mže být nap. *derivátor*. Ten je ukázán na následujícím obrázku. Jeho penos je roven $F(p) = \frac{U_0(p)}{U_i(p)} = -pCR$.



Inverzní Laplaceovu transformaci tohoto penosu lze vyjádit vztahem:

```
> invlaplace(p*tau,p,t);
```

$$\tau\,\mathrm{Dirac}(1,t) \tag{4}$$

Pedmet k Laplaceovu obrazu obecného typu $K\,(p-p0)$ je vyjáden následujícím výsledkem.

```
> invlaplace(K*(p-n0),p,t);
```

$$K\,(\mathrm{Dirac}(1,t)-n0\,\mathrm{Dirac}(t)) \tag{5}$$

Zde je ukázáno, co je mínno zápisem $\mathrm{Dirac}(1,t)$. Je to zejm derivace Diracovy funkce, což je opt nereálný signál.

```
> Diff(Heaviside(t),t):%=value(%);
> Diff(Dirac(t),t):%=value(%);
> Diff(Dirac(1,t),t):%=value(%);
```

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{Heaviside}(t)=\mathrm{Dirac}(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{Dirac}(t)=\mathrm{Dirac}(1,t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{Dirac}(1,t)=\mathrm{Dirac}(2,t) \tag{6}$$

Je nutné si uvdomit, že v pípad realizace výše uvedeného zapojení pi použití reálného operaního zesilovae nedostaneme, vlivem jeho kmitotové závislosti, pro penos uvedený vztah. V reálných podmínkách bude tedy vždy platit, že supe itatele je nižší než stupe jmenovatale penosu (pro velmi vysoký kmitoet se bude penos blížit k nule - vlivem kmitotové vávislosti zesílení, výstupní vnitní impedanci a výstupní kapacit).

Vnujme se však ješt dalšímu idealizovanému pípadu, kdy je stupe itatele i jmenovatele penosové funkce shodný a tudíž je penos takovéhoto systému nenulový i pro $\omega=\infty$, což nelze v praxi realizovat. Uvedený pípad demonstrujme na penosu, který obsahuje jednu nulu i pól v levé polorovin komplexní roviny p.

```
> P:=K*(p-n1)/(p-p1);
```

$$P:=\frac{K\,(p-n1)}{p-p1} \tag{7}$$

Reálná pól i nula penosu v levé polorovin

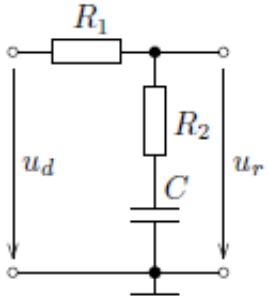
Pípad $|n1|>|p1|$

Nap. pro $n1=-1000$, $p1=-100$ a $K=\frac{1}{11}$ dostaneme

```
> Pf:=subs({K=1/11,n1=-1000,p1=-100,p=sigma+I*omega},P);
```

$$Pf := \frac{1}{11}\,\frac{\sigma + I\,\omega + 1000}{\sigma + I\,\omega + 100} \qquad \textbf{(4.1.1)}$$

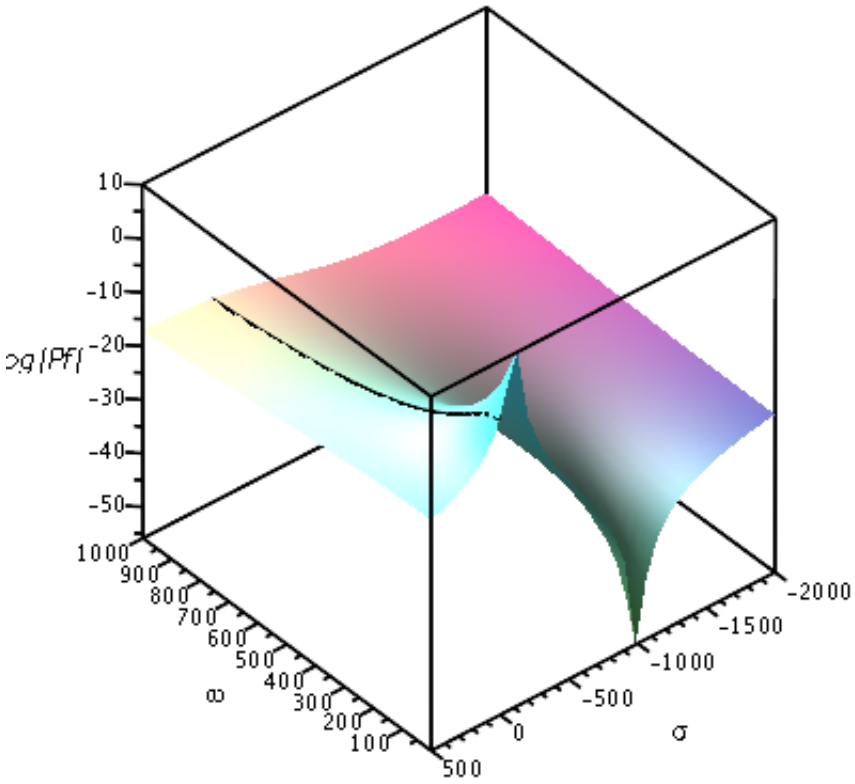
V našem pípad by mohl obvod realizující takovýto penos vypadat napíklad tak, jak je ukázáno na tomto obrázku.



Závislost penosu na komplexním kmitotu $p = \sigma + j\,\omega$ je vynesena na následujícím obrázku. Pro vtší dynamiku je penos vykreslen v dB.

```
> Surface:=plot3d(20*log10(abs(Pf)),omega=1..1000,sigma=-2000.
  .500,style=patchnogrid,axes=box,orientation=[140,52],
  numpoints=1000):
  curve_o:=[omega,0,20*log10(abs(subs(sigma=0,Pf)))]:
  B_o:=spacecurve(curve_o,omega=1..1000,axes=none,color=black,
  thickness=2):
  display(Surface,B_o,labels=[omega,sigma,`log|Pf|`],title=
  `Modul penosu v závislosti na "kompexním kmitotu" p`,
  labelfont=[HELVETICA],axesfont=[HELVETICA,8]);
```

Modul přenosu v závislosti na "kompexním kmitočtu" p

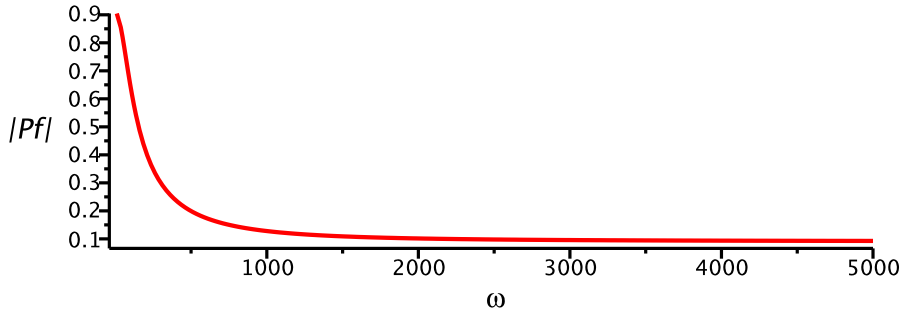


Tvar modulové charakteristiky opt dostaneme jako ez pro $\sigma = 0$ tak, jak je zvýraznno. Její prbh v logatirmickém mítku kmitotu je vynesen na dalším grafu. Je zde také fázová charaktristika, která má na první pohled nezvyklý tavar, který je dán pomrn blízkým umístním pólu a nuly penosu. (Fáze penosu zaíná na 0^o, potom díky pólu penosu klesá a dále vlivem nuly penosu opt stoupá až na 0^o).

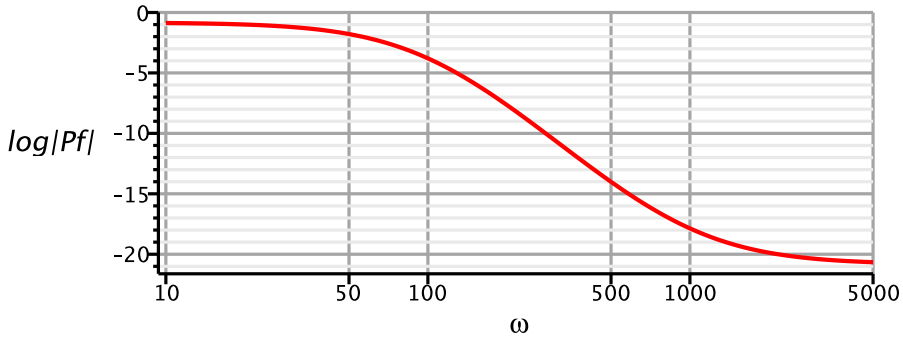
```
> plot(abs(subs(sigma=0,Pf)),omega=10..5000,title=`Modulová
  charakteristika s lineárním mítkem kmitotu [dB]`,labels=
  [omega,`|Pf|`],labelfont=[HELVETICA],axesfont=[HELVETICA,8],
  thickness=2);
  semilogplot(20*log10(abs(subs(sigma=0,Pf))),omega=10..5000,y=
  -21..0,title=`Modulová charakteristika s logaritmickým
  mítkem kmitotu [dB]`,labels=[omega,`log|Pf|`],axes=FRAME,
  labelfont=[HELVETICA], axesfont=[HELVETICA,8],thickness=2,
  gridlines=true);
  semilogplot(180/Pi*argument(subs(sigma=0,Pf)),omega=5..5000,
  title=`Fázová charakteristika s logaritmickým mítkem
  kmitotu [deg]`,labels=[omega,`Arg(Pf)`], axes=FRAME,
  labelfont=[HELVETICA], axesfont=[HELVETICA,8],thickness=2,
```

```
gridlines=true);
```

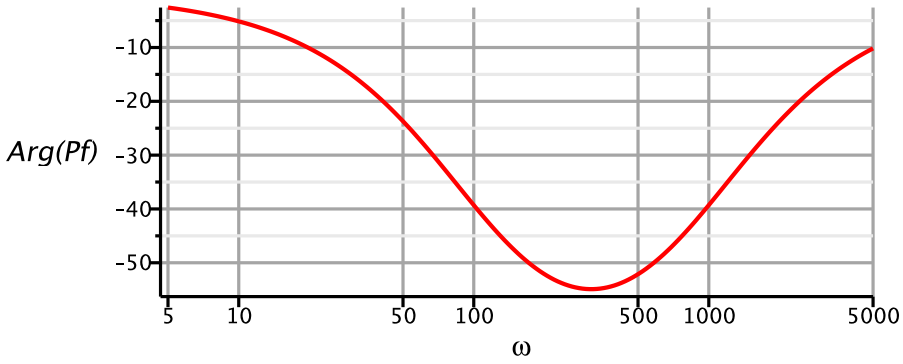
Modulová charakteristika s lineárním měřítkem kmitočtu [dB]



Modulová charakteristika s logaritmickým měřítkem kmitočtu [dB]



Fázová charakteristika s logaritmickým měřítkem kmitočtu [deg]



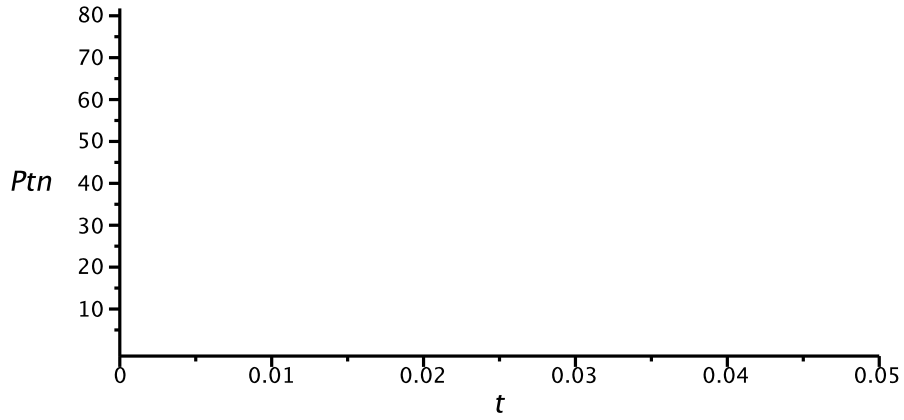
Následuje výpoet odezvy obvodu na Dirakv impulz - impulzní charakteristika.

```
> Pt:=invlaplace(P, p, t);
  Ptn:=subs({K=1/11,n1=-1000,p1=-100},Pt);
  plot(Ptn,t=0..0.05,labels=[t,`Ptn `],title=`Impulzní
  charakteristika`,labelfont=[HELVETICA],axesfont=[HELVETICA,
  8],thickness=2);
```

$$Pt := K\left(\mathrm{Dirac}(t) + (-n1 + p1)\, e^{p1\, t}\right)$$

$$Ptn := \frac{1}{11}\,\mathrm{Dirac}(t) + \frac{900}{11}\,e^{-100\,t}$$

Impulzní charakteristika



Je patrné, že ve výstupním signálu je opt Dirakv impulz. To je pochopitelné, jelikož stupe itatele i jmenovatele penosu je shodný. Ve skutenosti však vlivem prarazitních kapacit a indukností vodi bude penos vykazovat další póly práv v oblasti velmi vysokých kmitot a tudíž i odezva na nereálný vstupní signál (Diracv impulz) bude dávat na výstupu reálný signál. Toto je, jak jsme uvedli na zaátku, pouze idealizovaný pípad, ktrerý však pro oblasti relativn nízkých kmitot dává objektivní výsledky.

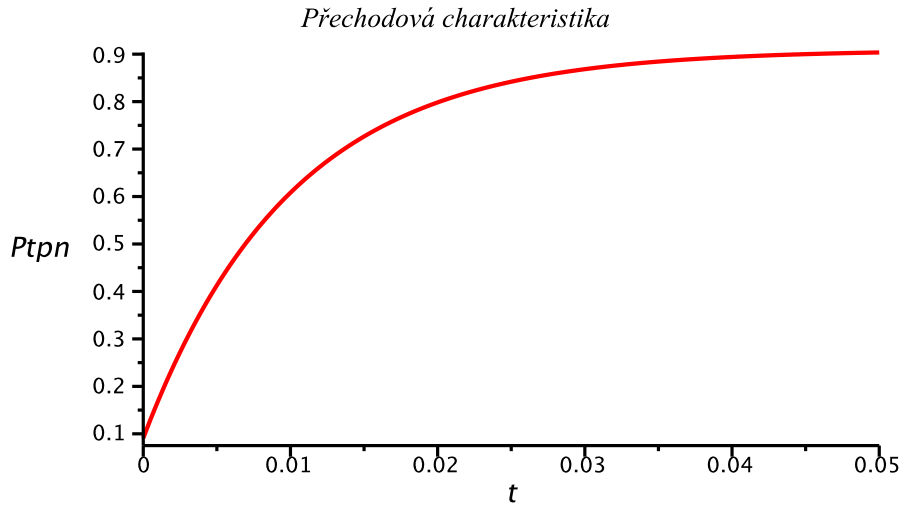
Daleko zajímavjší je skutenost, že poloha nuly penosu neovlivní charakter asové odezvy *Pt* (exponenciální, kmitavá), ale v exponentu, který tento charakter uruje, je pítomný pouze pól penosu. To je velmi dležité a vyplývá to z pedchozího výkladu (odezva.mws). Poloha nuly nemá tedy vliv na stabilitu obvodu a tudíž se u stabilního systému mže objevit jak v levé, tak i v pravé polorovin komplexní roviny, což si ukážeme dále.

Pro úplnost je zaazen i výpoet pechodové charakteristiky.

```
> Ptp:=invlaplace(P*1/p, p, t);
  Ptpn:=subs({K=1/11,n1=-1000,p1=-100},Ptp);
  plot(Ptpn,t=0..0.05,labels=[t,`Ptpn `],title=`Pechodová
  charakteristika`,labelfont=[HELVETICA],axesfont=[HELVETICA,
  8],thickness=2);
```

$$Ptp := K\left(\frac{n1}{p1} + \frac{(-n1+p1)\,e^{p1\,t}}{p1}\right)$$

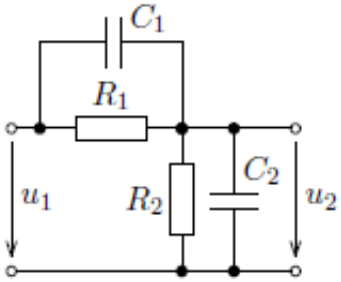
$$Ptpn := \frac{10}{11} - \frac{9}{11}\,e^{-100\,t}$$



Tvar kmitotových charakteristik je dán samozejm i vzájemnou polohou nuly a pólu. V tomto pípad byla absolutní hodnota nuly vtší než absolutní hodnota pólu, tj. $|n1| > |p1|$,

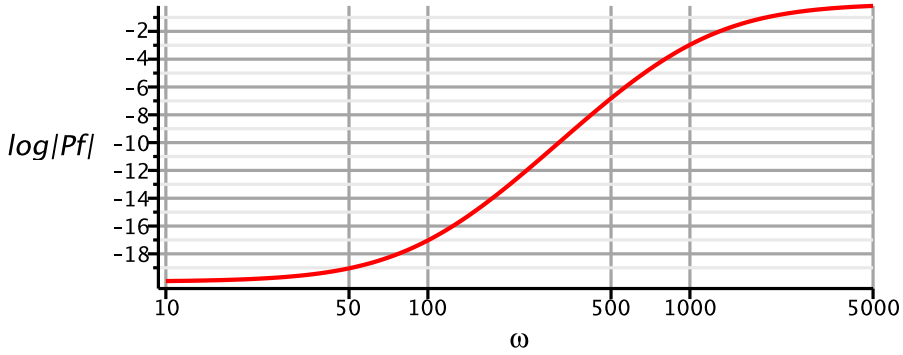
Pípad $|n1| < |p1|$

V tomto pípad je $|n1| < |p1|$, nap. pro $n1 = -100$, $p1 = -1000$ je pak tvar charakteristik následující - mní se charakter filtru.
Realizace obvodu pro tento penos (resp. obecný penos) pak mže vypadat následovn, piemž ale absolutní hodnota penosu bude vždy menší než 1 (pro $|Pf(f)| > 1$ je nutná aktivní realizace).

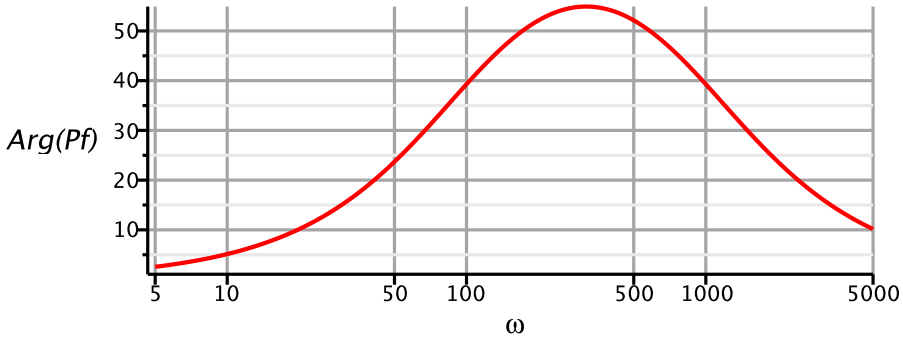



```
> semilogplot(20*log10(abs(subs({K=1,n1=-100,p1=-1000,p=I*
  omega},P))),omega=10..5000,title=`Modulová charakteristika s
  logaritmickým mítkem kmitotu [dB]`,labels=[omega,
  `log|Pf|`],axes=FRAME,labelfont=[HELVETICA], axesfont=
  [HELVETICA,8],thickness=2,gridlines=true);
  semilogplot(180/Pi*argument(subs({K=10,n1=-100,p1=-1000,p=I*
  omega},P)),omega=5..5000,title=`Fázová charakteristika s
  logaritmickým mítkem kmitotu [deg]`,labels=[omega,`Arg(Pf)
  `], axes=FRAME,labelfont=[HELVETICA], axesfont=[HELVETICA,8],
  thickness=2,gridlines=true);
```

Modulová charakteristika s logaritmickým měřítkem kmitočtu [dB]



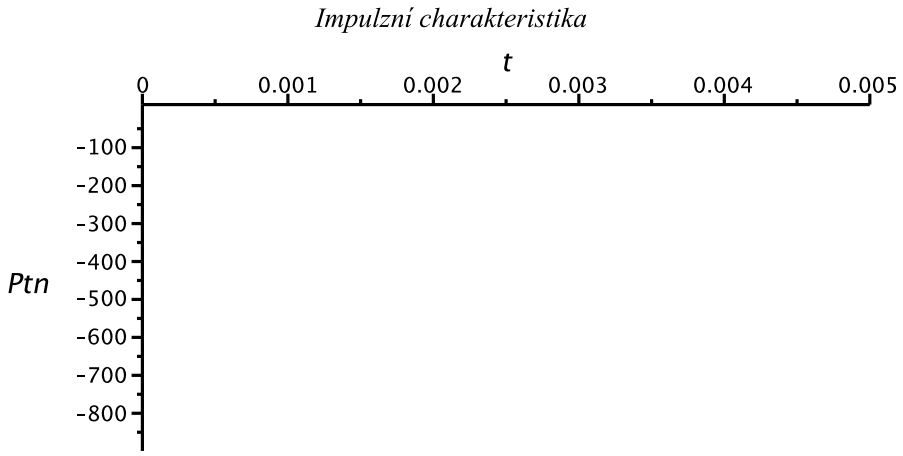
Fázová charakteristika s logaritmickým měřítkem kmitočtu [deg]



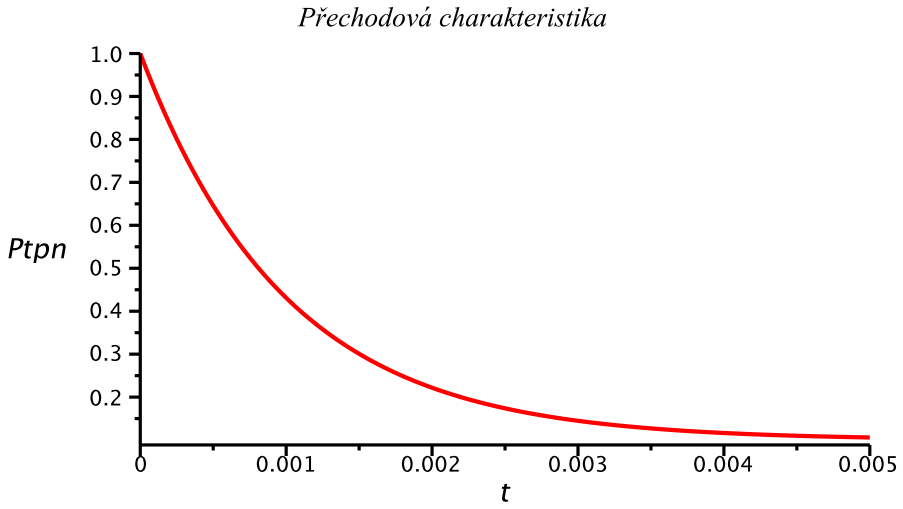
Charakter impulzní i pechodové charakteristiky se oproti pedchozímu pípadu nemní. Je dán, jak bylo uvedeno pouze charakterem pólu.

```
> Ptn:=subs({K=1,n1=-100,p1=-1000},Pt);
  plot(Ptn,t=0..0.005,labels=[t,`Ptn `],title=`Impulzní
  charakteristika`,labelfont=[HELVETICA],axesfont=[HELVETICA,
  8],thickness=2);
> Ptpn:=subs({K=1,n1=-100,p1=-1000},Ptp);
  plot(Ptpn,t=0..0.005,labels=[t,`Ptpn `],title=`Pechodová
  charakteristika`,labelfont=[HELVETICA],axesfont=[HELVETICA,
  8],thickness=2);
```

$$Ptn := \mathrm{Dirac}(t) - 900\, e^{-1000\, t}$$



$$Ptpn := \frac{1}{10} + \frac{9}{10}\, e^{-1000\, t}$$



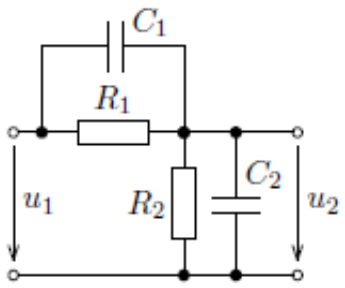
Pípad *n1=p1*, konstantní penos, nezávislý na kmitotu

V tomto pípad je penos se zmní na konstantu.

```
> Pnp:=subs(n1=p1,P);
```

$$Pnp := K \qquad \textbf{(4.3.1)}$$

Obvod realizující takového penosu ($K < 1$) je uveden níže. Jedná se o shodný obvod jako v pedchozím pípad, kde ale bude dodrženo $R_1 C_1 = R_2 C_2$ (použití nap. v osciloskopických sondách - kmitotov nezávislý dli).



Je zejmé, že kmitotové charakteristiky budou konstantní, modulová rovna $20 \cdot \log|K|$ a fázová rovna 0. Z tohoto dvodu je nebudeme vykreslovat

Odezva obvodu na Dirakv impulz - impulzní charakteristika je Dirakv impulz a pechodová charakteristika je konstanta. Ze stejného dvodu nejsou také vykresleny.

```
> Pt:=invlaplace(Pnp, p, t);
> Ptp:=invlaplace(Pnp*1/p, p, t);
```

$$Pt := K\,\mathrm{Dirac}(t)$$

$$Ptp := K \qquad \textbf{(4.3.2)}$$

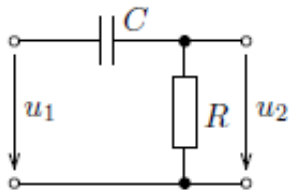
Reálný pól v levé polorovin a nula penosu v nule (pro nulový kmitoet)

Nap. pro $p1 = -1000$ a $K = 1$ dostaneme

```
> Pf:=subs({K=1,n1=0,p1=-1000,p=sigma+I*omega},P);
```

$$Pf := \frac{\sigma + \mathrm{I}\,\omega}{\sigma + \mathrm{I}\,\omega + 1000} \qquad \textbf{(5.1)}$$

Toto je píklad penosu obvodu, který vykazuje nulový penos pro stejnosmrný signál -- stídav vázané systémy (nap. pomocí oddlovacích kondenzátor. Takový penos lze realizovat jednoduchým derivaním RC lánkem.

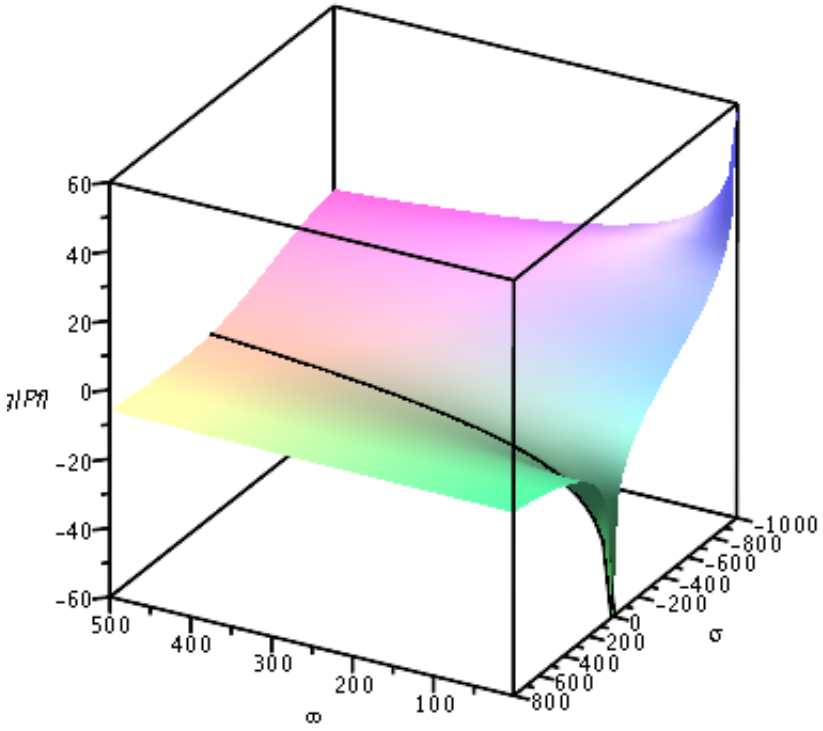


Závislost penosu na komplexním kmitotu $p = \sigma + j\,\omega$ je vynesena na následujícím obrázku.

```
> Surface:=plot3d(20*log10(abs(Pf)),omega=1..500,sigma=-1000.
  .800,style=patchnogrid,axes=box,orientation=[119,64],numpoints=
  2000):
  curve_o:=[omega,0,20*log10(subs(sigma=0,abs(Pf)))]:
  B_o:=spacecurve(curve_o,omega=1..500,axes=none,color=black,
  thickness=3):
  display(Surface,B_o,labels=[omega,sigma,`log|Pf|`],title=`Modul
```

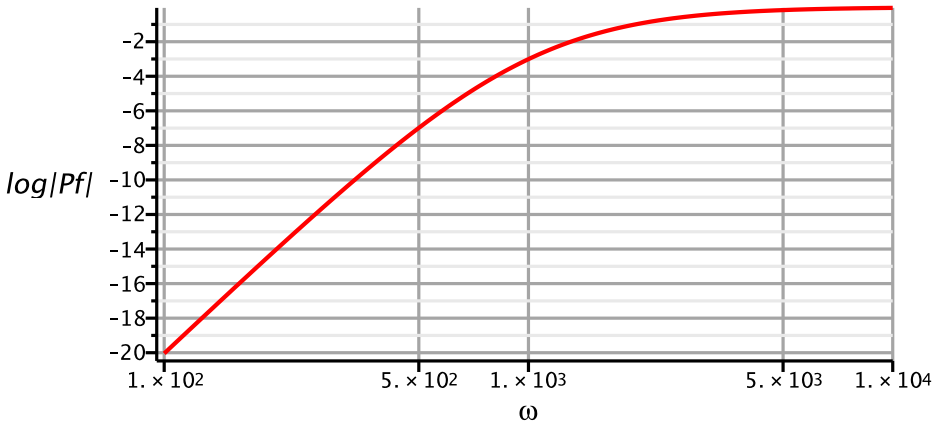
```
penosu v závislosti na "kompexním kmitotu" p`,labelfont=
[HELVETICA,8],axesfont=[HELVETICA,8]);
```

Modul přenosu v závislosti na "kompexním kmitočtu" p

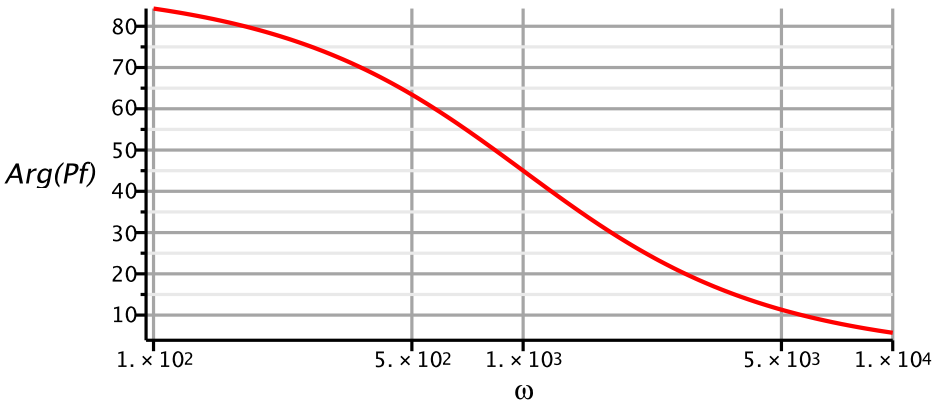



```
> semilogplot(20*log10(abs(subs(sigma=0,Pf))),omega=100..10000,
  title=`Modulová charakteristika s logaritmickým mítkem
  kmitotu [dB]`,labels=[omega,`log|Pf|`],axes=FRAME,labelfont=
  [HELVETICA], axesfont=[HELVETICA,8],thickness=2,gridlines=true)
  ;
  semilogplot(180/Pi*argument(subs(sigma=0,Pf)),omega=100..10000,
  title=`Fázová charakteristika s logaritmickým mítkem kmitotu
  [deg]`,labels=[omega,`Arg(Pf)`], axes=FRAME,labelfont=
  [HELVETICA], axesfont=[HELVETICA,8],thickness=2,gridlines=true)
  ;
```

Modulová charakteristika s logaritmickým měřítkem kmitočtu [dB]



Fázová charakteristika s logaritmickým měřítkem kmitočtu [deg]



Hodnota modulu a fáze penosu pro kmitoet rovný hodnot pólu penosu (v dB a rad.).

```
> evalf(20*log10(abs(subs({sigma=0,omega=1000},Pf))),2);
> argument(subs({sigma=0,omega=1000},Pf));
```

$$-3.0$$

$$\frac{1}{4}\,\pi \qquad \textbf{(5.2)}$$

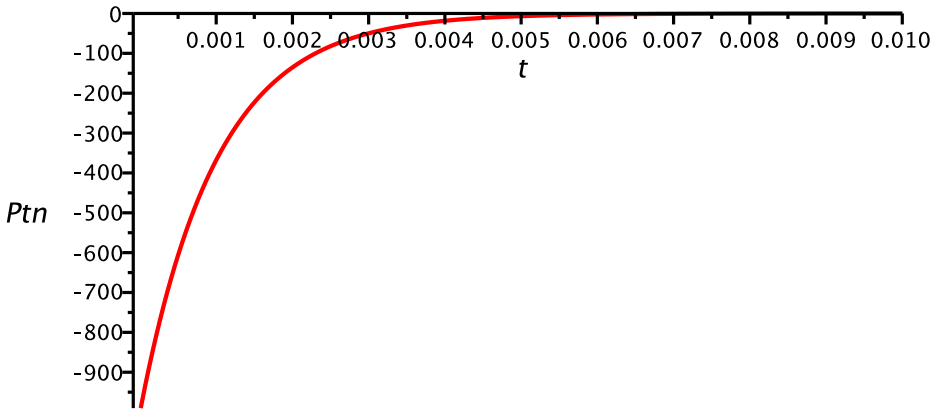
Jak bylo eeno, nuly penosu neovlivují charakter asové odezvy a tudíž i zde se na stabilit takovéto soustavy se nic nezmní. V tomto jednoduchém pípad lze navíc velmi dobe odhadnout jak tvar impulzové, tak pechodové charakteristiky.

```
> Pt:=invlaplace(subs(n1=0,P), p, t);
  Ptn:=evalc(Re(subs({K=1,p1=-1000},Pt)));
  plot(Ptn,t=0.00001..0.01,title=`Impulzní charakteristika`,
  labels=[t,`Ptn `],labelfont=[HELVETICA],axesfont=[HELVETICA,8],
  thickness=2);
```

$$Pt := K\left(\mathrm{Dirac}(t) + \mathrm{e}^{p1\,t}\,p1\right)$$

$$Ptn := \mathrm{Dirac}(t) - 1000\,\mathrm{e}^{-1000\,t}$$

Impulzní charakteristika

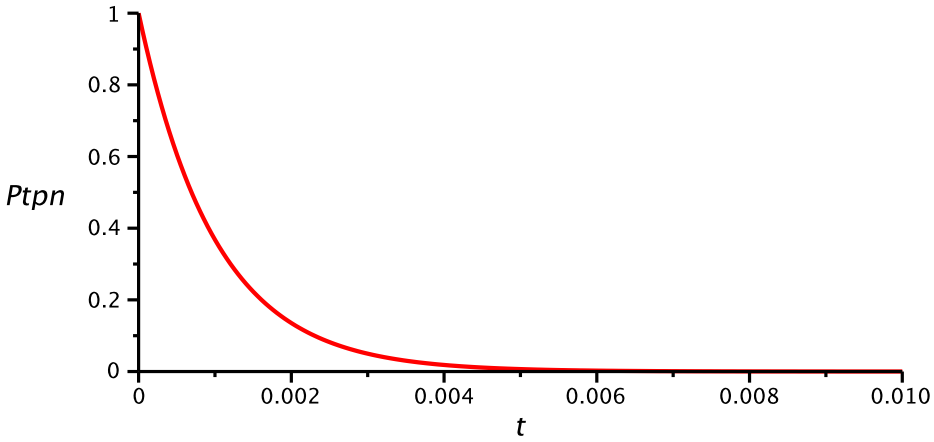



```
> Ptp:=invlaplace(subs(n1=0,P*1/p), p, t);
  Ptpn:=subs({K=1,p1=-1000},Ptp);
  plot(Ptpn,t=0..0.01,title=`Pechodová charakteristika`,labels=
  [t,`Ptpn `],labelfont=[HELVETICA],axesfont=[HELVETICA,8],
  thickness=2);
```

$$Ptp := K\,\mathrm{e}^{p1\,t}$$

$$Ptpn := \mathrm{e}^{-1000\,t}$$

Přechodová charakteristika



Reálná pól v levé polorovin a nula penosu v pravé polorovin

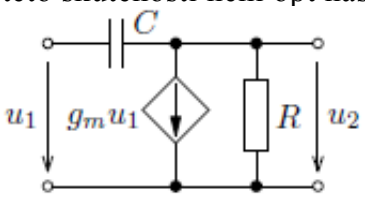
Obecný pípad reálné nuly v pravé polorovin a pólu v polorovin levé ($|n1| > |p1|$)

Nap. pro $n1 = 1000, p1 = -100$ a $K = \frac{1}{11}$ dostaneme

```
> Pf:=subs({K=1,n1=1000,p1=-100,p=sigma+I*omega},P);
```

$$Pf := \frac{\sigma + I\,\omega - 1000}{\sigma + I\,\omega + 100} \qquad \textbf{(6.1.1)}$$

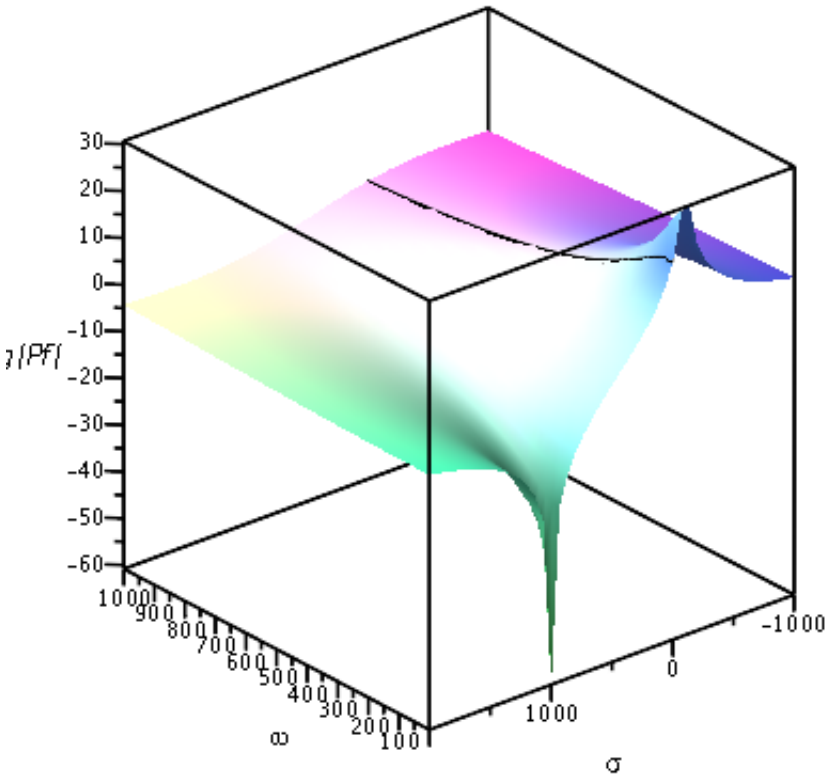
V našem pípad by mohl obvod realizující takovýto penos vypadat napíklad tak, jak je ukázáno na tomto obrázku (obvod navíc obrací fázi, tj. $K<0$). Všimnte si, že se jedná o "aktivní obvod" - obsahuje ízený zdroj (v našem pípad zdroj proudu ízený naptím). Tento obvod se navíc pomrn asto vyskytuje v linearizovaných obvodech rzných zesilova, tudíž se nejedná o žádný vykonstruovaný píklad. Pasivní obvod složený pouze z rezistor, kapacitor a induktor má všechny nuly penosu v levé polorovin (jde o obvod s minimální fází). Odvození této skutenosti není opt naším cílem a zvídavého tenáe odkážeme na píslušnou literaturu.



Závislost penosu na komplexním kmitotu $p = \sigma + j\,\omega$ je vynesena na následujícím obrázku.

```
> Surface:=plot3d(20*log10(abs(Pf)),omega=1..1000,sigma=-1000.
  .2000,style=patchnogrid,axes=box,orientation=[140,64],
  numpoints=2000):
  curve_o:=[omega,0,20*log10(abs(subs(sigma=0,Pf)))]:
  B_o:=spacecurve(curve_o,omega=1..1000,axes=none,color=black,
  thickness=2):
  display(Surface,B_o,labels=[omega,sigma,`log|Pf|`],title=
  `Modul penosu v závislosti na "kompexním kmitotu" p`,
  labelfont=[HELVETICA],axesfont=[HELVETICA,8]);
```

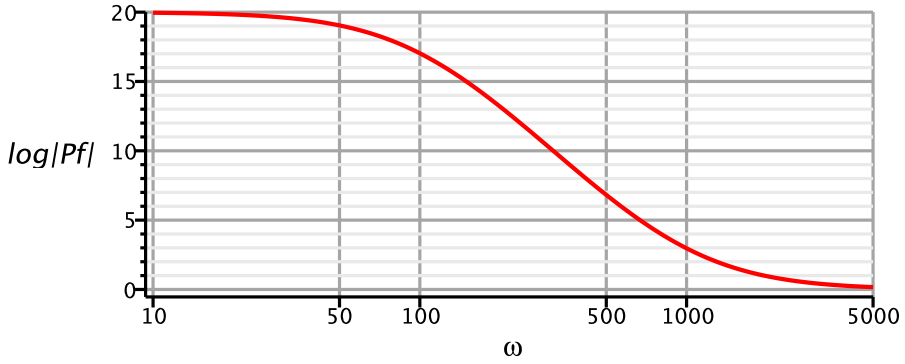
Modul přenosu v závislosti na "kompexním kmitočtu" p



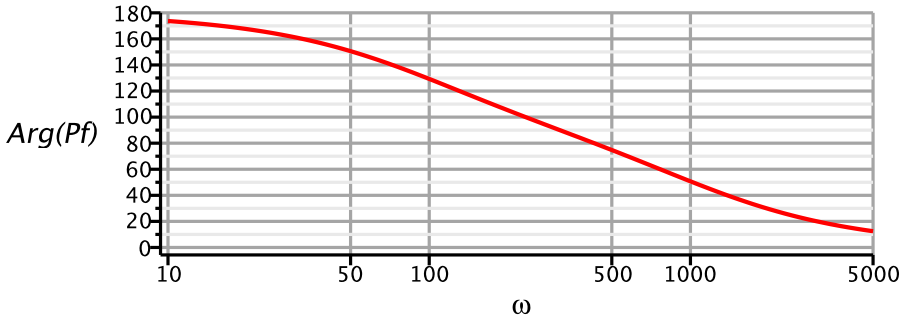
Tvar modulové charakteristiky se oproti pedchozímu pípadu nezmní. Rozdíl však nastává v charakteristice fázové. Oproti minulému pípadu zde fáze penosu zaíná na 180^o (obvod otái pro stejnosmrný signál fázi), jak bylo uvedeno. Díky pólu penosu fáze klesá, ale vlivem nuly penosu fáze klesá také až na 0^o. To je velmi dležité - **nula vpravo má na fázovou charakteristiku stejný vliv jako pól penosu, ale tvar modulové charakteristiky je stejný jako by tato nula ležela v levé polotovin komplexní roviny**. Tento poznatek využijeme hlavn tehdy, až se budeme zabývat stabilitou zptnovazebních soustav, kde jak uvidíme je tato otázka velmi dležitá.

```
> semilogplot(20*log10(abs(subs(sigma=0,Pf))),omega=10..5000,y=
  0..20,title=`Modulová charakteristika s logaritmickým
  mítkem kmitotu [dB]`,labels=[omega,`log|Pf|`],axes=FRAME,
  labelfont=[HELVETICA], axesfont=[HELVETICA,8],thickness=2,
  gridlines=true);
  semilogplot(180/Pi*argument(subs(sigma=0,Pf)),omega=10..5000,
  y=0..180,title=`Fázová charakteristika s logaritmickým
  mítkem kmitotu [deg]`,labels=[omega,`Arg(Pf)`], axes=
  FRAME,labelfont=[HELVETICA], axesfont=[HELVETICA,8],
  thickness=2,gridlines=true);
```

Modulová charakteristika s logaritmickým měřítkem kmitočtu [dB]



Fázová charakteristika s logaritmickým měřítkem kmitočtu [deg]



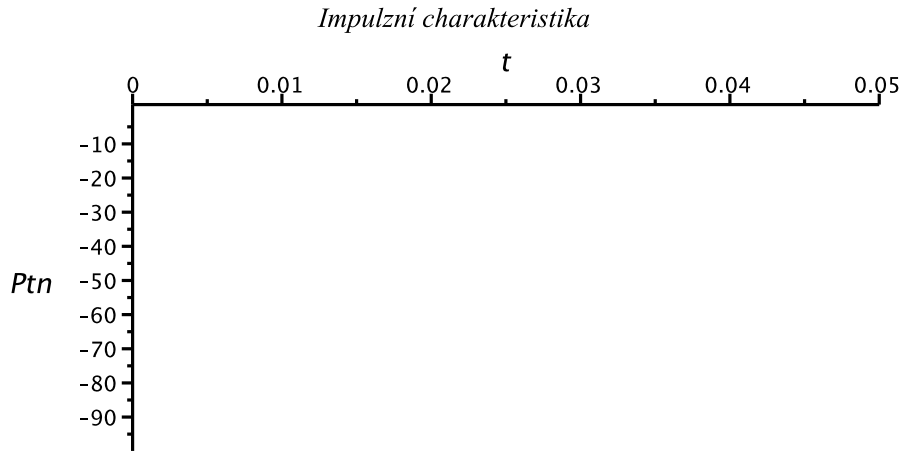
Zde je analyzován pípad $|n1| > |p1|$. Analýzu opaného pípadu ($|n1| < |p1|$) necháme na tenái, zmna by odpovídala zmn v pedchozí sekci.

Na stabilit takovéto soustavy se nic nezmní, jak ukazují následující výpoty a jak bylo eeno již v pedchozím výkladu.

```
> Pt:=invlaplace(P, p, t);
  Ptn:=subs({K=1/11,n1=1000,p1=-100},Pt);
  plot(Ptn,t=0..0.05,labels=[t,`Ptn `],title=`Impulzní
  charakteristika`,labelfont=[HELVETICA],axesfont=[HELVETICA,
  8],thickness=2);
```

$$Pt := K\left(\mathrm{Dirac}(t) + (-n1 + p1)\, e^{p1\, t}\right)$$

$$Ptn := \frac{1}{11}\,\mathrm{Dirac}(t) - 100\, e^{-100\, t}$$



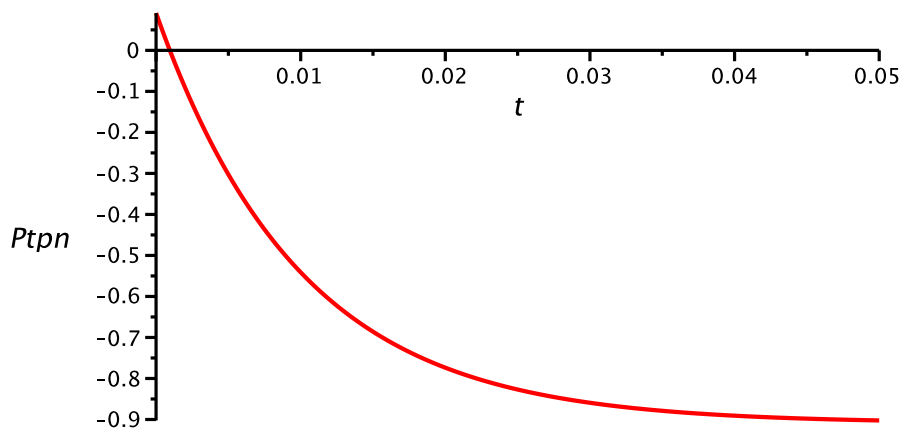
Odezva na Dirakv impulz - impulzní charakteristika se až na znaméko velmi podobá pedchzímu píkladu (ve skutenosti se zmnilo zanaménko i velikost násobné konstakty exponenciály). Po odezní pechodového jevu se systém opt ustálí a výstupní signál zaniká - obvod je stabilní.

Podobn se zmní i chrakteristika pechodová.

```
> Ptp:=invlaplace(P*1/p, p, t);
  Ptpn:=subs({K=1/11,p1=1000,p2=-100},Ptp);
  plot(Ptpn,t=0..0.05,labels=[t,`Ptpn `],title=`Pechodová
  charakteristika`,labelfont=[HELVETICA],axesfont=[HELVETICA,
  8],thickness=2);
```

$$Ptp := K\left(\frac{p1}{p2} + \frac{(-p1+p2)\,e^{p2\,t}}{p2}\right)$$

$$Ptpn := -\frac{10}{11} + e^{-100\,t}$$



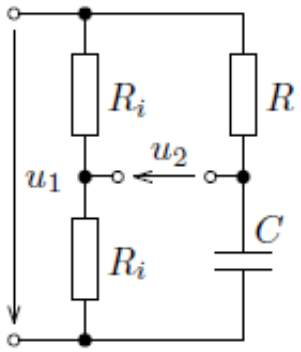
Nula v pravé polorovin se stejnou velikostí jako pól ($|n1| = |p1|$) - fázovací lánek (All Pass)

Nap. pro $n1 = 1000, p1 = -1000$ a $K = \frac{1}{11}$ dostaneme

```
> Pf:=subs({K=1/2,n1=1000,p1=-1000,p=sigma+I*omega},P);
```

$$Pf := \frac{1}{2}\,\frac{\sigma + I\,\omega - 1000}{\sigma + I\,\omega + 1000} \qquad \textbf{(6.2.1)}$$

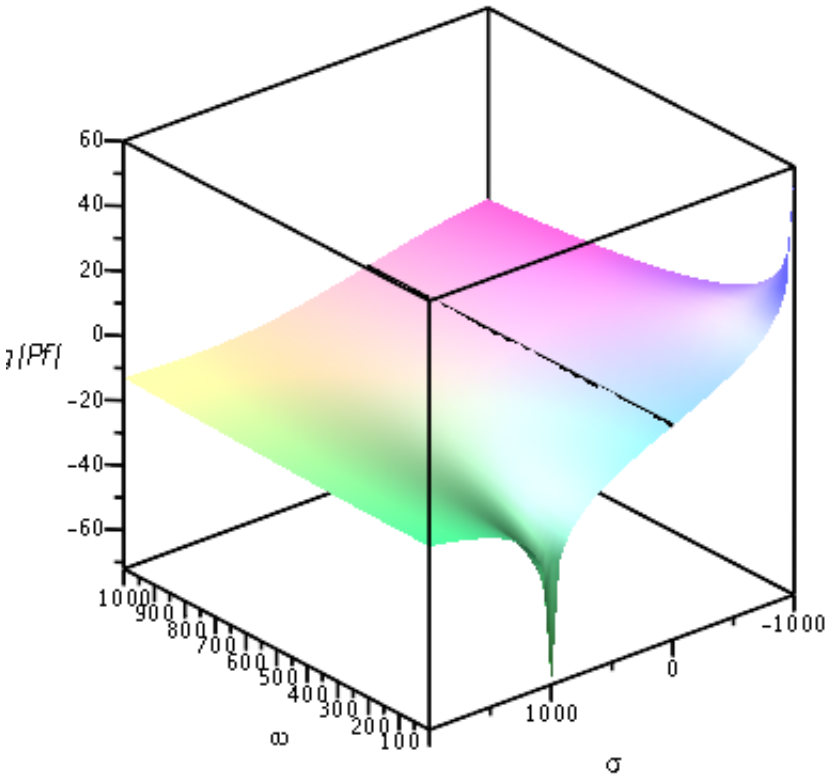
V našem pípad by mohl obvod realizující takovýto penos vypadat napíklad tak, jak je ukázáno na tomto obrázku (pasivní realizace, kdy *K=1/2*).



Závislost penosu na komplexním kmitotu $p = \sigma + j\,\omega$ je vynesena na následujícím obrázku.

```
> Surface:=plot3d(20*log10(abs(Pf)),omega=1..1000,sigma=-1000.
  .2000,style=patchnogrid,axes=box,orientation=[140,64],
  numpoints=2000):
  curve_o:=[omega,0,20*log10(abs(subs(sigma=0,Pf)))]:
  B_o:=spacecurve(curve_o,omega=1..1000,axes=none,color=black,
  thickness=2):
  display(Surface,B_o,labels=[omega,sigma,`log|Pf|`],title=
  `Modul penosu v závislosti na "kompexním kmitotu" p`,
  labelfont=[HELVETICA],axesfont=[HELVETICA,8]);
```

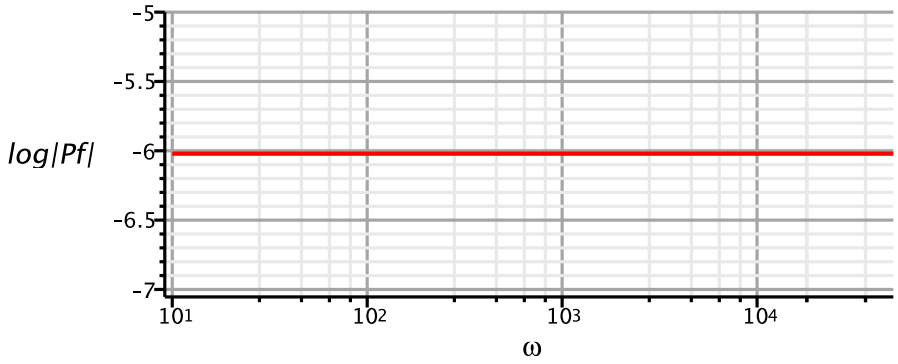
Modul přenosu v závislosti na "kompexním kmitočtu" p



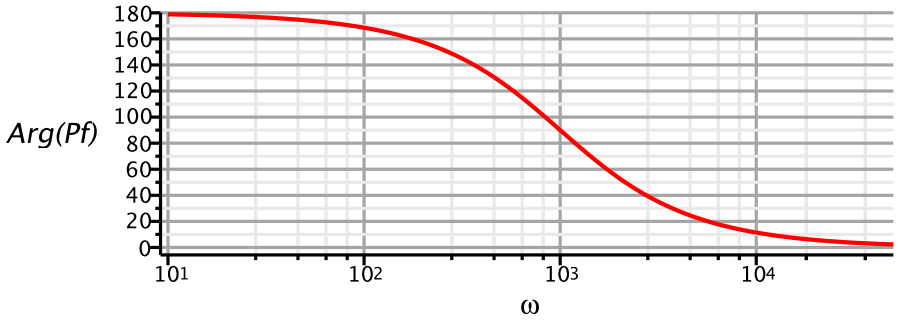
Modul penosu je v tomto pípad nezávislý na kmitotu, ale fáze se s kmitotem mní - jedná se o tzv. fázovací lánek. Nula v pravé polorovin má, jak bylo uvedeno stejný vliv na fázovou charakteristiku jako pól penostu, tj. fáze se v tomto pípad (jeden pól, jedna nula penosu) zmní celkov o 180^{o}.

```
> semilogplot(20*log10(abs(subs(sigma=0,Pf))),omega=10..50000,
  y=-7..-5,title=`Modulová charakteristika s logaritmickým
  mítkem kmitotu [dB]`,labels=[omega,`log|Pf|`],axes=FRAME,
  labelfont=[HELVETICA], axesfont=[HELVETICA,8],thickness=2,
  gridlines=true);
  semilogplot(180/Pi*argument(subs(sigma=0,Pf)),omega=10.
  .50000,y=0..180,title=`Fázová charakteristika s logaritmickým
  mítkem kmitotu [deg]`,labels=[omega,`Arg(Pf)`], axes=
  FRAME,labelfont=[HELVETICA], axesfont=[HELVETICA,8],
  thickness=2,gridlines=true);
```

Modulová charakteristika s logaritmickým měřítkem kmitočtu [dB]



Fázová charakteristika s logaritmickým měřítkem kmitočtu [deg]



Hodnota fáze penosu pro kmitoet rovný hodnot pólu resp. nuly penosu.

```
> argument(subs({sigma=0,omega=1000},Pf));
```

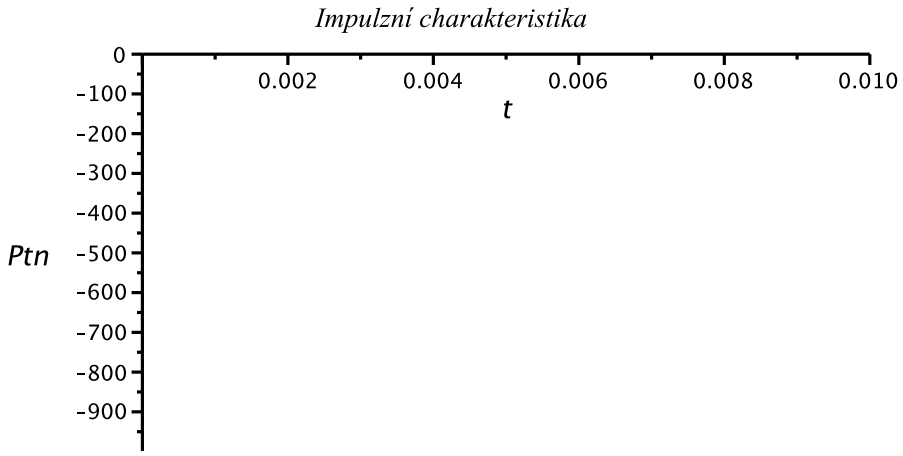
$$\frac{1}{2}\,\pi \qquad \textbf{(6.2.2)}$$

Na stabilit takovéto soustavy se nic nezmní, jak ukazují následující výpoty a jak bylo eeno již v pedchozím výkladu.

```
> Pt:=invlaplace(P, p, t);
  Ptn:=subs({K=1/2,n1=1000,p1=-1000},Pt);
  plot(Ptn,t=0..0.01,labels=[t,`Ptn `],title=`Impulzní
  charakteristika`,labelfont=[HELVETICA],axesfont=[HELVETICA,
  8],thickness=2);
```

$$Pt := K\left(\mathrm{Dirac}(t) + (-n1 + p1)\,\mathrm{e}^{p1\,t}\right)$$

$$Ptn := \frac{1}{2}\,\mathrm{Dirac}(t) - 1000\,\mathrm{e}^{-1000\,t}$$



Následují příklady penos s komplexn sdruženou dvojicí pól. Jsou ukázány vlastnosti penosu obsahující jenu nebo dv nuly penosu, ležící na reálné ose i penosu s komplexn sdruženou dvojicí nul.

Komplexn sdružený pól a nuly penosu na reálné ose

```
> P:=K*(p-n1)/(p-p1)/(p-p2);
```

$$P := \frac{K\,(p-n1)}{(p-p1)\,(p-p2)} \tag{7.1}$$

Obecný píklad penosu s komplexn sdruženým pólem a nulou na reálné ose

Toto je jednoduchý obecný píklad reálného penosu, kdy je stupe itatele je menší než stupe jmenovatele s nulou v pravé nebo levé polorovin a koplexn sdruženým pólem.

Nap. pro $n1 = -1000$, $p1 = -20 + I\cdot 100$ a $p2 = -20 - I\cdot 100$ dostaneme následující kmotitové charakteristiky

```
> Pf:=subs({K=1,n1=-5000,p1=-20+I*100,p2=-20-I*100,p=I*omega},
  P);
  omega[0]=sqrt(20^2+100.^2); Q=rhs(%)/2/20;
  semilogplot(20*log10(abs(Pf)),omega=10..100000,title=
  `Modulová charakteristika s logaritmickým mítkem kmitotu
  [dB]`,labels=[omega,`log|Pf|`],axes=FRAME,labelfont=
  [HELVETICA], axesfont=[HELVETICA,8],thickness=2,gridlines=
  true);
  semilogplot(180/Pi*argument(Pf),omega=10..100000,title=
  `Fázová charakteristika s logaritmickým mítkem kmitotu
  [deg]`,labels=[omega,`Arg(Pf)`], axes=FRAME,labelfont=
  [HELVETICA], axesfont=[HELVETICA,8],thickness=2,gridlines=
```

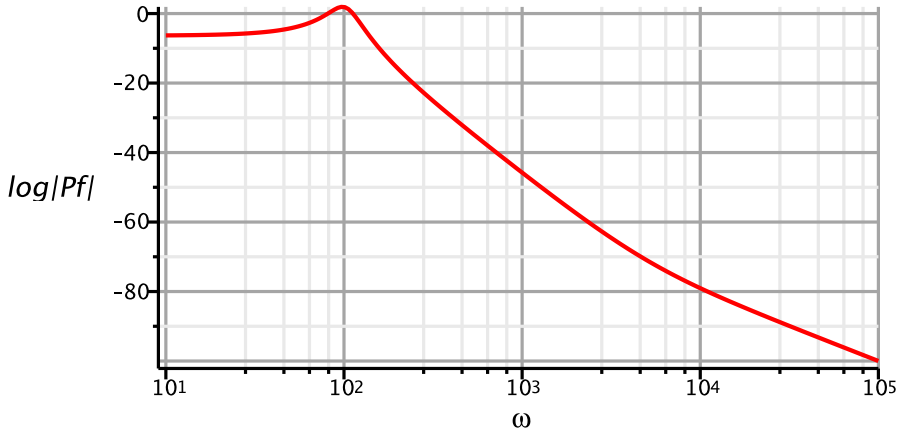
```
true);
```

$$Pf := \frac{I\omega + 5000}{(I\omega + 20 - 100\,I)\,(I\omega + 20 + 100\,I)}$$

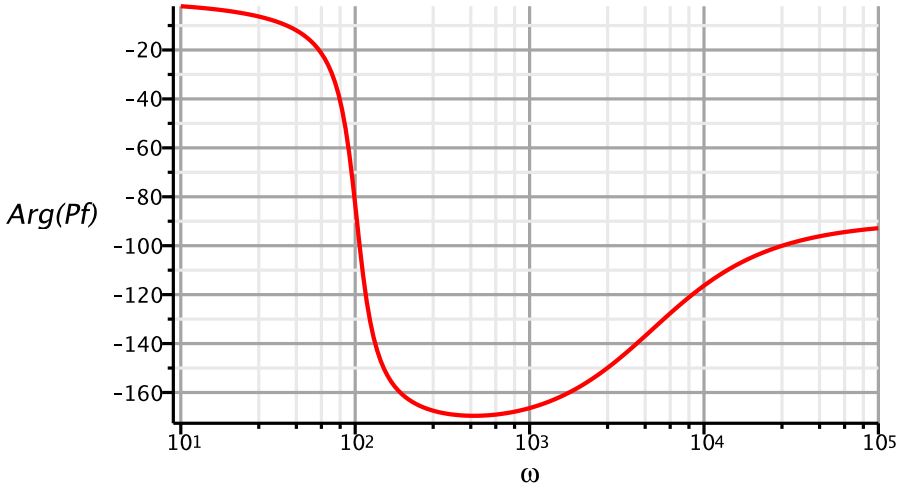
$$\omega_0 = 101.9803903$$

$$Q = 2.549509758$$

Modulová charakteristika s logaritmickým měřítkem kmitočtu [dB]



Fázová charakteristika s logaritmickým měřítkem kmitočtu [deg]



Je samozejmé, že vliv nuly je stejný jako v pedchozích pípadech - zde nula na kmitotu 1000 rad./s mní strmost modulové charakteristiky (+20dB/dek) a v okolí tohoto kmitotu se mní fázová charakteristika o $+90^{o}$.

asová odezva je urena jak pro nulu na pravé, tak i na levé ásti reálné osy.

```
> Pt:=invlaplace(P, p, t);
```

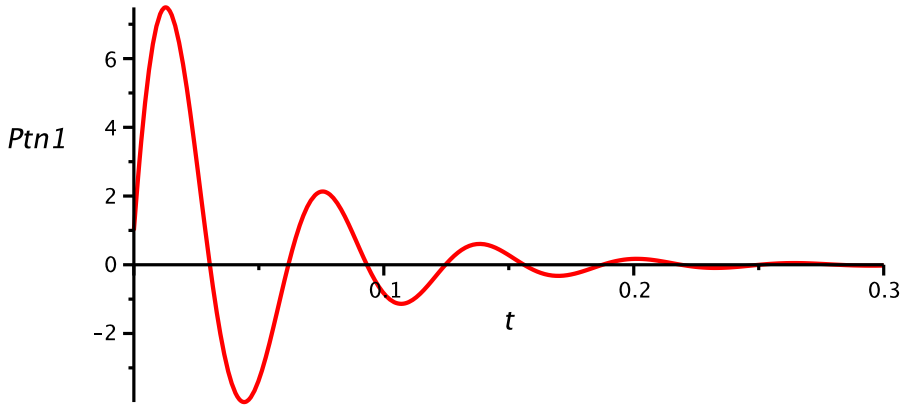
```
Ptn1:=evalc(Re(subs({K=1,n1=-1000,p1=-20+I*100,p2=-20-I*100},
Pt)));
Ptn2:=evalc(Re(subs({K=1,n1=1000,p1=-20+I*100,p2=-20-I*100},
Pt)));
plot(Ptn1,t=0..0.3,title=`Impulzní charakteristika (nula
vlevo)`,labels=[t,`Ptn1 `],labelfont=[HELVETICA],axesfont=
[HELVETICA,8],thickness=2);
plot(Ptn2,t=0..0.3,title=`Impulzní charakteristika (nula
vpravo)`,labels=[t,`Ptn2 `],labelfont=[HELVETICA],axesfont=
[HELVETICA,8],thickness=2);
```

$$Pt := \frac{K\left(e^{p1\,t}\left(p1 - n1\right) + e^{p2\,t}\left(-p2 + n1\right)\right)}{p1 - p2}$$

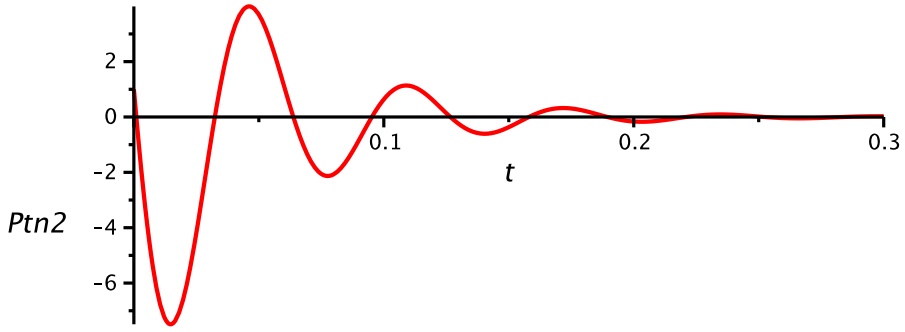
$$Ptn1 := e^{-20\,t}\cos(100\,t) + \frac{49}{5}\,e^{-20\,t}\sin(100\,t)$$

$$Ptn2 := e^{-20\,t}\cos(100\,t) - \frac{51}{5}\,e^{-20\,t}\sin(100\,t)$$

Impulzní charakteristika (nula vlevo)



Impulzní charakteristika (nula vpravo)



Jak je vidt z výše uvedených vztah a z tchto obrázk, poloha nuly nemá vliv na stabilitu

obvodu, pouze mní tvar signálu odezvy. Charakter odezvy je dán chrakterem pól penosu.

Dále se budeme v této kategorii zabývat specifickými pípady, které se používají v oblasti kmitotových filtr. Nebudeme také udávat pímo póly penosu, ale budeme pracovat s promnnými penosu ω_0 a Q, tj. s penosem ve tvaru:

```
> Pq:=numer(P)/expand(subs({p1=(-1+sqrt(1-4*Q^2))*omega[0]/2/Q,
  p2=(-1-sqrt(1-4*Q^2))*omega[0]/2/Q},denom(P)));
```

$$Pq := -\frac{K\,(-p+n1)}{p^2+\frac{p\,\omega_0}{Q}+\omega_0^2} \tag{7.2}$$

Komplexn sdružená dvojice pól a dvojnásobná nula v nekonenu - dolní propust (DP)

Penosová funkce je ve tvaru

```
> Pq1:=K/expand(subs({p1=(-1+sqrt(1-4*Q^2))*omega[0]/2/Q,p2=(-1
  -sqrt(1-4*Q^2))*omega[0]/2/Q},denom(P)));
```

$$Pq1 := \frac{K}{p^2+\frac{p\,\omega_0}{Q}+\omega_0^2} \tag{7.2.1}$$

a limitní hodnoty modulu penosu pro DC a velmi vysoký kmitoet jsou následující:

```
> 'Pq1(infitiny)'=limit(Pq1,p=infinity);
```

$$Pq1(infitiny) = 0 \tag{7.2.2}$$

```
> 'Pq1(0)'=limit(Pq1,p=0);
```

$$Pq1(0) = \frac{K}{\omega_0^2} \tag{7.2.3}$$

Je zejmé, že se jedná o DP. Násobná konstanta se obvykle udává ve tvaru $K=\frac{H_0}{\omega_0}$, Potom H_0 udává pímo zisk v propustném pásmu.

Jelikož jsme se tímto typem penosu podrobn zabývali v pedchocím výkladu, nebodeme zde již jeho charakteristiky znova prezentovat.

Komplexn sdružená dvojice pól a nula v nule (nulovém kmitotu) - pásmová propust (PP)

Penosová funkce je ve tvaru

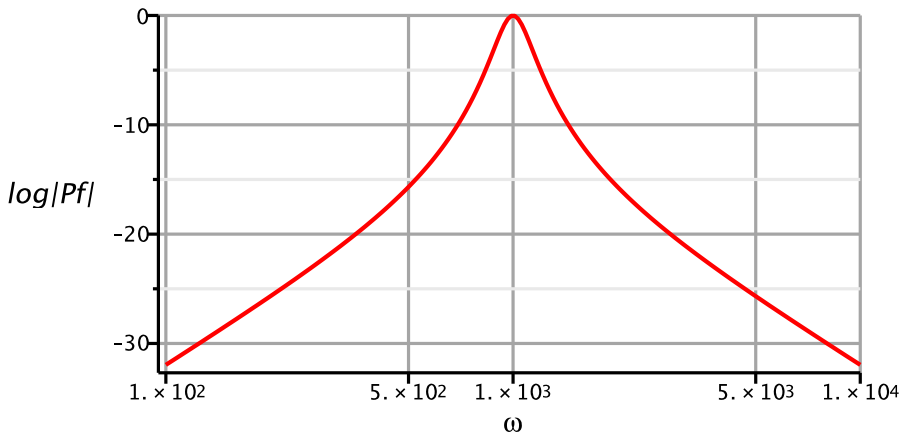
```
> Pq2:=subs({n1=0},Pq);
```

$$Pq2 := \frac{K\,p}{p^2+\frac{p\,\omega_0}{Q}+\omega_0^2} \tag{7.3.1}$$

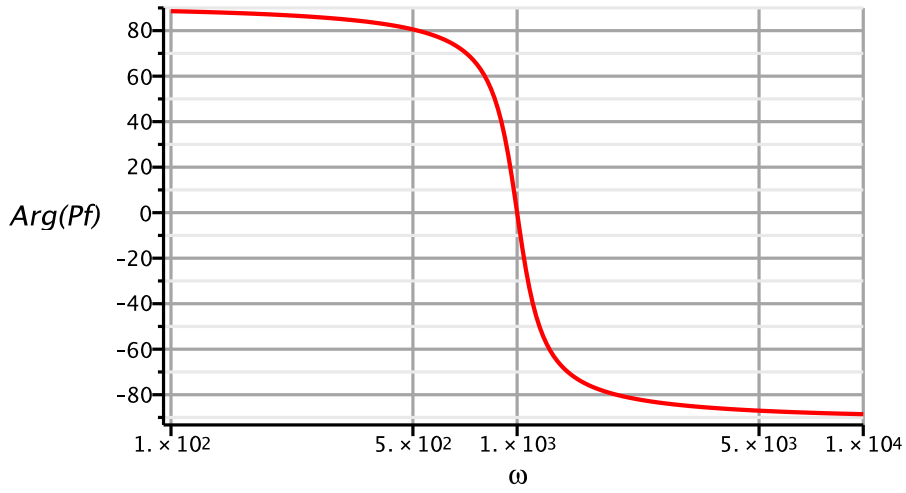
Nap. pro $\omega_0 = 1000$, $Q = -3$ a $K = \frac{\omega_0}{Q}$ dostaneme následující kmotitové charakteristiky

```
> Pf:=subs({K=1000/4,omega[0]=1000,Q=4,p=I*omega},Pq2):
  semilogplot(20*log10(abs(Pf)),omega=100..10000,y=-32..0,
  title=`Modulová charakteristika s logaritmickým mítkem
  kmitotu [dB]`,labels=[omega,`log|Pf|`],axes=FRAME,labelfont=
  [HELVETICA], axesfont=[HELVETICA,8],thickness=2,gridlines=
  true);
  semilogplot(180/Pi*argument(Pf),omega=100..10000,y=-90.
  .90,title=`Fázová charakteristika s logaritmickým mítkem
  kmitotu [deg]`,labels=[omega,`Arg(Pf)`], axes=FRAME,
  labelfont=[HELVETICA], axesfont=[HELVETICA,8],thickness=2,
  gridlines=true);
```

Modulová charakteristika s logaritmickým měřítkem kmitočtu [dB]



Fázová charakteristika s logaritmickým měřítkem kmitočtu [deg]



Volba $K = \frac{\omega_0}{Q}$ byla urena tak, aby zisk v propustném pásmu H_0 byl práv 1, tj. 0dB, jelikož

```
> 'Pq2(omega[0])=H[B]'=simplify(subs(p=I*omega[0],Pq2));
```

$$\left(Pq2\left(\omega_0\right) = H_B\right) = \frac{K\,Q}{\omega_0} \qquad \textbf{(7.3.2)}$$

Fáze penosu je pro tento zlomový kmitoet ($\omega = \omega_0$) evidentm nulová a maximum modulové charakteristiky nastává také pí tomto kmitotu.

```
> solve(diff(evalc(abs(subs(p=I*omega,Pq2))),omega),omega);
  evalf(subs({K=1000/4,omega[0]=1000,Q=4},[%]));
```

$$\omega_0,\ -\omega_0,\ I\,\omega_0,\ -I\,\omega_0,\ \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{2\,Q^2-1+\sqrt{-4\,Q^2+1}}\ \omega_0}{Q},$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{2\,Q^2-1+\sqrt{-4\,Q^2+1}}\ \omega_0}{Q},\ \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{4\,Q^2-2-2\,\sqrt{-4\,Q^2+1}}\ \omega_0}{Q},$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{4\,Q^2-2-2\,\sqrt{-4\,Q^2+1}}\ \omega_0}{Q}$$

$$[1000.,\ -1000.,\ 1000.\,I,\ -1000.\,I,\ 992.1567414+125.0000000\,I,\ -992.1567414 \qquad \textbf{(7.3.3)}$$
$$-125.0000000\,I,\ 992.1567416-125.0000000\,I,\ -992.1567416+125.0000000\,I]$$

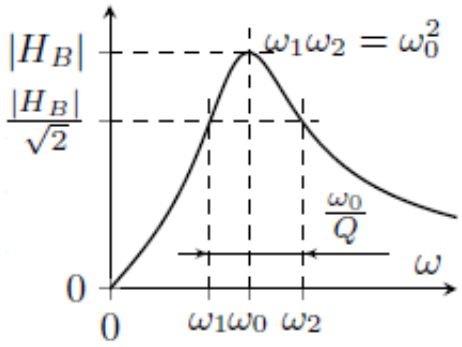
Nyní najdme kmitoet poklesu modulu penosu o 3dB oproti maximu:

```
> om12:=solve(evalc(abs(subs(K=omega[0]/Q,p=I*omega,Pq2)))=
  1/sqrt(2),omega);
  evalf(subs({K=1000/4,omega[0]=1000,Q=4},[%]));
```

$$om12 := \frac{1}{2}\,\frac{\left(1+\sqrt{1+4\,Q^2}\right)\omega_0}{Q},\ -\frac{1}{2}\,\frac{\left(-1+\sqrt{1+4\,Q^2}\right)\omega_0}{Q},$$
$$\frac{1}{2}\,\frac{\left(-1+\sqrt{1+4\,Q^2}\right)\omega_0}{Q},\ -\frac{1}{2}\,\frac{\left(1+\sqrt{1+4\,Q^2}\right)\omega_0}{Q}$$

$$[1132.782218,\ -882.782218,\ 882.782218,\ -1132.782218] \qquad \textbf{(7.3.4)}$$

Je zejmé, že 2. a 4. výsledek je záporný. Uvažujme tedy pouze dva výsledky $om12_1 = \omega_2$ a $om12_3 = \omega_1$, které jsou ilustrovány na tomto obrázku a níže je dkaz uvedených skuteností.




```
> 'omega[2]-omega[1]'=simplify(om12[1]-om12[3]);
> 'omega[1]*omega[2]'=simplify(om12[3]*om12[1]);
```

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$$

$$\omega_1\,\omega_2 = \omega_0^2 \qquad \textbf{(7.3.5)}$$

Hodnota fáze penosu pro zlomový kmitoet ω_0.

```
> simplify(evalc(argument(subs(p=I*omega[0],Pq2)))) assuming
  Q>1, K>0, omega[0]>0;
```

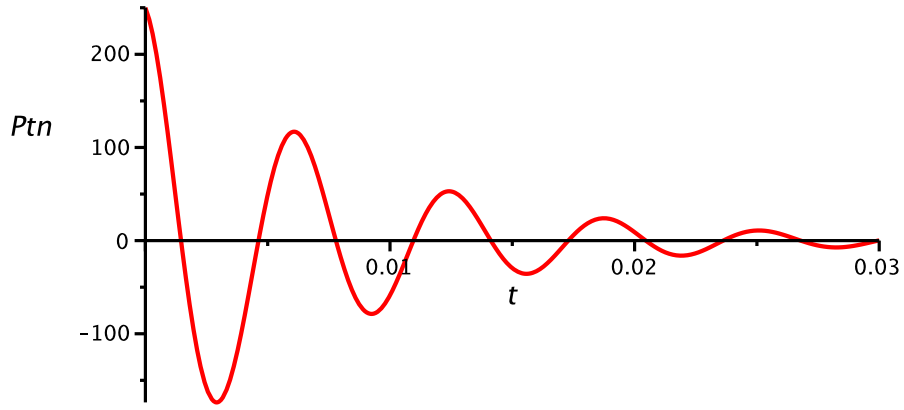
$$0 \qquad \textbf{(7.3.6)}$$

asová odezva je následkující

```
> Ptn:=invlaplace(subs({K=1000/4,omega[0]=1000,Q=4},Pq2), p, t)
  ;
  plot(Ptn,t=0..0.03,title=`Impulzní charakteristika (nula
  vlevo)`,labels=[t,`Ptn `],labelfont=[HELVETICA],axesfont=
  [HELVETICA,8],thickness=2);
```

$$Ptn := \frac{250}{21}\,e^{-125\,t}\left(21\cos\left(375\sqrt{7}\,t\right) - \sqrt{7}\,\sin\left(375\sqrt{7}\,t\right)\right)$$

Impulzní charakteristika (nula vlevo)



Jak bylo odvozeno výše, charakter odezvy je pln uren charakterem pól penosu, tj. kmitoet odezvy je dán imaginární ástí pólu, zatímco tlumení je dáno jeho reálnou ástí.

```
> 'p12'=solve(subs({omega[0]=1000,Q=4},denom(Pq2)));
```

$$p12 = \left(375\,\mathrm{I}\sqrt{7} - 125,\ -125 - 375\,\mathrm{I}\sqrt{7}\right) \qquad \textbf{(7.3.7)}$$

Dále uvažujme penosovou funkci se dvmi nulami a dvma (komplexn sdruženými) póly.

```
> P:=K*(p-n1)*(p-n2)/(p-p1)/(p-p2);
```

$$P := \frac{K\,(p-n1)\,(p-n2)}{(p-p1)\,(p-p2)} \qquad \textbf{(7.3)}$$

Opt nebudeme uvádt pímo póly penosu, ale budeme pracovat s promnnými penosu ω_0 a Q, tj. s penosem ve tvaru:

```
> Pq:=numer(P)/expand(subs({p1=(-1+sqrt(1-4*Q^2))*omega[0]/2/Q,
  p2=(-1-sqrt(1-4*Q^2))*omega[0]/2/Q},denom(P)));
```

$$Pq := \frac{K\,(-p+n1)\,(-p+n2)}{p^2 + \frac{p\,\omega_0}{Q} + \omega_0^2} \qquad \textbf{(7.4)}$$

Komplexn sdružená dvojice pól a dvojnásobná nula v nule (nulovém kmitotu) - horní propust (HP)

Penosová funkce je ve tvaru

```
> Pq3:=subs({n1=0,n2=0},Pq);
```

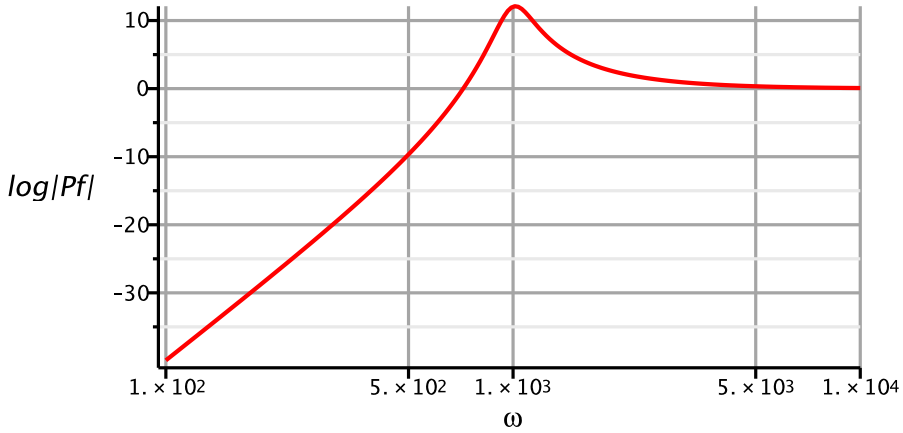
$$Pq3 := \frac{K\,p^2}{p^2 + \frac{p\,\omega_0}{Q} + \omega_0^2} \qquad \textbf{(7.4.1)}$$

Nap. také pro $\omega_0 = 1000$, $Q = -3$ a $K = 1$ dostaneme následující kmotitové charakteristiky

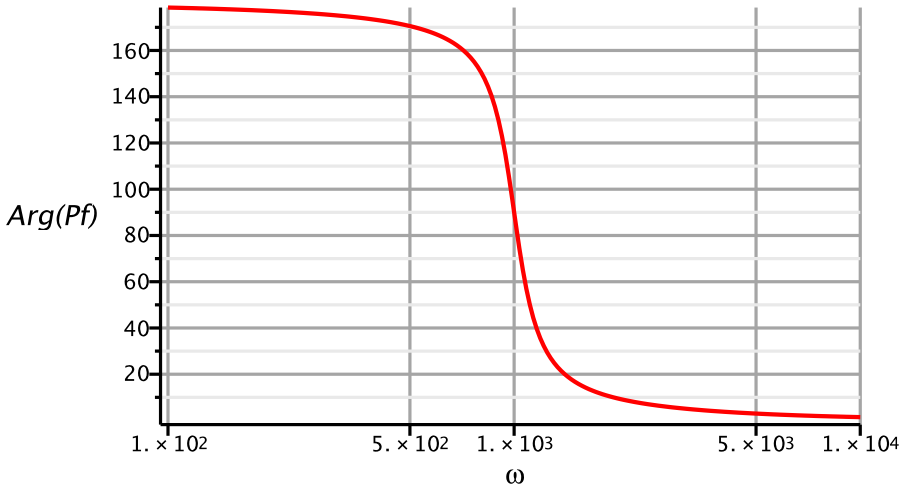
```
> Pf:=subs({K=1,omega[0]=1000,Q=4,p=I*omega},Pq3):
```

```
semilogplot(20*log10(abs(Pf)),omega=100..10000,title=
`Modulová charakteristika s logaritmickým mítkem kmitotu
[dB]`,labels=[omega,`log|Pf|`],axes=FRAME,labelfont=
[HELVETICA], axesfont=[HELVETICA,8],thickness=2,gridlines=
true);
semilogplot(180/Pi*argument(Pf),omega=100..10000,title=
`Fázová charakteristika s logaritmickým mítkem kmitotu
[deg]`,labels=[omega,`Arg(Pf)`], axes=FRAME,labelfont=
[HELVETICA], axesfont=[HELVETICA,8],thickness=2,gridlines=
true);
```

Modulová charakteristika s logaritmickým měřítkem kmitočtu [dB]



Fázová charakteristika s logaritmickým měřítkem kmitočtu [deg]



Volba $K = 1$ byla urena tak, aby zisk v propustném pásmu H_∞ byl práv 1, tj. 0dB, jelikož

```
> 'Pq3(infinity)=H[infinity]'=limit(Pq3,p=infinity);
```

$$(Pq3(\infty) = H_\infty) = K \qquad \textbf{(7.4.2)}$$

Najdme kmitoet maxima modulu penosu.

```
> omax:=solve(diff(evalc(abs(subs(p=I*omega,Pq3))),omega),
  omega);
  evalf(subs({K=1,omega[0]=1000,Q=4},[%]));
```

$$omax := \frac{2\,\omega_0\,Q}{\sqrt{4\,Q^2-2}}, -\frac{2\,\omega_0\,Q}{\sqrt{4\,Q^2-2}}, \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{2\,Q^2-1+\sqrt{-4\,Q^2+1}}\;\omega_0}{Q},$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{2\,Q^2-1+\sqrt{-4\,Q^2+1}}\;\omega_0}{Q}, \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{4\,Q^2-2-2\sqrt{-4\,Q^2+1}}\;\omega_0}{Q},$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{4\,Q^2-2-2\sqrt{-4\,Q^2+1}}\;\omega_0}{Q}$$

$$[1016.001016,\ -1016.001016,\ 992.1567414 + 125.0000000\,I,\ -992.1567414 - 125.0000000\,I,\ 992.1567416 - 125.0000000\,I,\ -992.1567416 + 125.0000000\,I] \qquad \textbf{(7.4.3)}$$

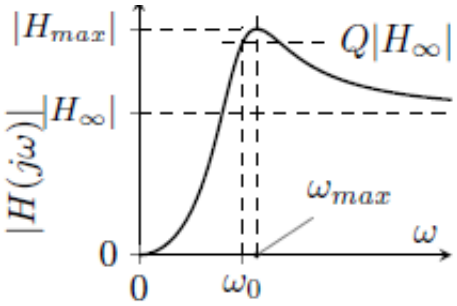
Maximum modulové charakteristiky je pak:

```
> Hmax:=simplify(evalc(abs(subs(p=I*omax[1],Pq3)))) assuming
  Q>1, K>0;
  evalf(20*log10(subs({K=1,omega[0]=1000,Q=4},%)));
```

$$Hmax := \frac{2\,Q^2\,K}{\sqrt{4\,Q^2-1}}$$

$$12.10959407 \qquad \textbf{(7.4.4)}$$

Modul a fáze penosu pro zlomový kmitoet ($\omega = \omega_0$).




```
> simplify(evalc(abs(subs(p=I*omega[0],Pq3)))) assuming Q>0,
  K>0;
> simplify(evalc(argument(subs(p=I*omega[0],Pq3)))) assuming
  Q>0, K>0;
```

$$K\,Q$$

$$\frac{1}{2}\,\pi \qquad \textbf{(7.4.5)}$$

Hodnota fáze penosu pro zlomový kmitoet ω_0.

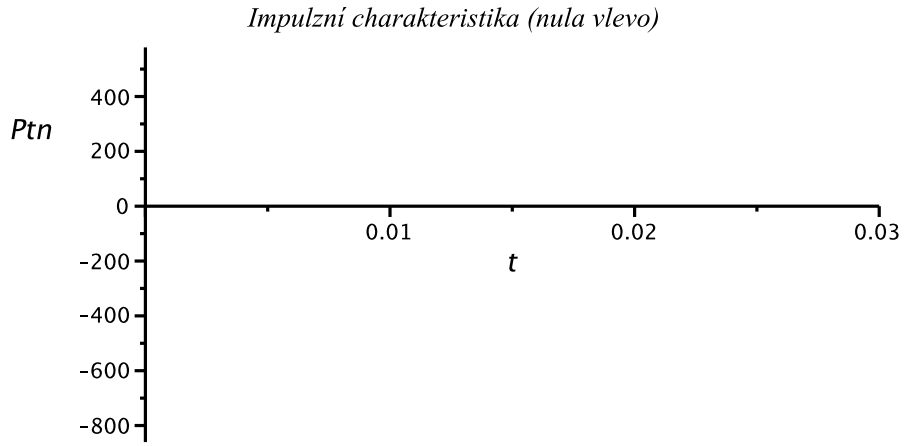
```
> simplify(evalc(argument(subs(p=I*omega[0],Pq3)))) assuming
  Q>1, K>0, omega[0]>0;
```

$$\frac{1}{2}\,\pi \qquad \textbf{(7.4.6)}$$

asová odezva je následkující

```
> Ptn:=invlaplace(subs({K=1,omega[0]=1000,Q=4},Pq3), p, t);
  plot(Ptn,t=0..0.03,title=`Impulzní charakteristika (nula
  vlevo)`,labels=[t,`Ptn `],labelfont=[HELVETICA],axesfont=
  [HELVETICA,8],thickness=2);
```

$$Ptn := \mathrm{Dirac}(t) - \frac{250}{21}\,e^{-125\,t}\left(21\cos\left(375\sqrt{7}\,t\right) + 31\sqrt{7}\,\sin\left(375\sqrt{7}\,t\right)\right)$$



Jak bylo odvozeno výše, charakter odezvy je pln uren charakterem pól penosu, tj. kmitoet odezvy je dán imaginární ástí pólu, zatímco tlumení je dáno jeho reálnou ástí.

```
> 'p12'=solve(subs({omega[0]=1000,Q=4},denom(Pq3)));
```

$$p12 = \left(375\,I\sqrt{7} - 125,\ -125 - 375\,I\sqrt{7}\right) \qquad \textbf{(7.4.7)}$$

V poslední ukázce je píklad penosu s dvmi nulami a dvma póly. Na nm je demonstrován vliv komplexní dvojice nul na chování obvodu (v asové i kmitotové oblasti).

Nyní již známe všechy možné pípady, které se mohou vyskytnout v penosech lineárních nebo linearizovaných soustav s jednoduchými i koplexn sdruženými póly a s jednoduchými nulami penosu. Následují pípady s komlexn sdruženou dvojicí nul penosu. Jelikož nuly penosu nemájí vliv na stabilitu obvodu, je situace daleko jednodužší než tomu bylo v pípad pól penosu. Vliv na kmitotové charakteristiky je u koplexn sdružených nul pesn inverzní (zrcadlov pevrácený podle osy ω) oproti koplexn sdruženým pólm, tudíž známý. Rozdíl je pouze v pípad nul v pravé polorovin, kde modulová charakteristika zstává inverzní, ale fázová chrakteristika je shodná jako v pípad pól. O píspvcích jednotlivých pól na celkové vlastnosti (v kmitotové oblasti) jsme hovoili

na závr minulé kapitoly (aeo_pol.mws). Tyto poznatky samozejm platí i zde, pro penosy obsahující jak póly tak nuly.

Definujme penos opt v následujícím tvaru, terý také upravíme pro zadání parametr ω_0 a Q, tj. s penosem ve tvaru Pq.

```
> P:=K*(p-n1)*(p-n2)/(p-p1)/(p-p2);
> Pq:=numer(P)/expand(subs({p1=(-1+sqrt(1-4*Q^2))*omega[0]/2/Q,p2=
  (-1-sqrt(1-4*Q^2))*omega[0]/2/Q},denom(P)));
```

$$P := \frac{K\,(p-n1)\,(p-n2)}{(p-p1)\,(p-p2)}$$

$$Pq := \frac{K\,(-p+n1)\,(-p+n2)}{p^2+\frac{p\,\omega_0}{Q}+\omega_0^2} \qquad (8)$$

Komplexn sdružený pól i nula penosu