

# Předmluva

Elektrické filtry tvoří v současné době významnou součást elektronických zařízení. Své uplatnění nacházejí v oblastech od telekomunikační techniky (omezení hovorového pásma) až po digitální zpracování signálu (antialiasingové filtry atd.).

Úloha aproximace zadaných požadavků vhodnou funkcí je první a základní úlohou návrhu elektrických filtrů. Postupem času se návrh filtru radikálně změnil. V dnešní době, při nasazení výkonné výpočetní techniky, je možné postup návrhu účinně algoritmizovat, a tak ušetřit spoustu času, což ještě v nedávné minulosti nebylo možné.

Cílem této práce je vytvořit komplexní programový modul, který umožňuje provádět nestandardní aproximace přenosových funkcí analogových selektivních soustav. Zatímco standardní aproximace jsou již důkladně propracovány, včetně použití v programech (*SYNTFIL*, *NAF*), nestandardní aproximace jsou v praxi velice málo používány. Také programových prostředků, které by poskytovaly možnost nestandardních aproximací přenosové funkce, najdeme velice málo (zde můžeme jmenovat snad jen program *NAP*, který se však touto problematikou zabývá jen v omezené míře).

Tato diplomová práce popisuje velice efektivní algoritmus pro návrh nestandardních přenosových funkcí selektivních soustav. Výsledkem práce je pak počítačový program, umožňující kompletní a pohodlný návrh přenosové funkce s využitím výše uvedeného algoritmu.

Předložená práce je rozčleněna do pěti kapitol :

- V první z nich jsou rozebrány základní vlastnosti selektivních soustav a matematický popis těchto obvodů.
- Ve druhé části je detailně popsán Remesův optimalizační algoritmus, ze kterého dále popisovaný algoritmus vychází.
- Ve třetí kapitole je kompletně rozebrán optimalizační algoritmus použitý v programu *NAPFIL*, včetně numerických metod využitých při implementaci algoritmu v programu.
- Ve čtvrté kapitole je uveden popis programu *NAPFIL* včetně ovládání.
- V poslední části jsou uvedeny příklady návrhu nestandardních přenosových funkcí programem *NAPFIL*.

V Praze dne 20.1.1999

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod do problematiky</b>	<b>1</b>
1.1	Postup při návrhu elektrických filtrů . . . . .	1
1.2	Přehled standardních aproximací . . . . .	3
1.2.1	Butterworthova aproximace . . . . .	3
1.2.2	Čebyševova aproximace . . . . .	4
1.2.3	Inverzní Čebyševova aproximace . . . . .	4
1.2.4	Cauerova aproximace . . . . .	4
1.3	Přehled nestandardních aproximací . . . . .	5
1.3.1	Asymptotická aproximace lomenými přímkami (Bóde) . . . . .	5
1.3.2	Rumpeltova šablona . . . . .	5
1.3.3	Danielsova šablonová metoda . . . . .	5
1.4	Matematický popis filtru . . . . .	5
1.4.1	Přenosová funkce filtru . . . . .	6
1.4.2	Vlastnosti funkcí $G(p)$ a $\varphi(p)$ . . . . .	7
1.4.3	Určení přenosové funkce z charakteristické funkce . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Remesův druhý algoritmus</b>	<b>10</b>
2.1	Základní předpoklady . . . . .	10
2.2	Čebyševova věta o nejlepší aproximaci . . . . .	10
2.3	Konstrukce Čebyševovy aproximace pomocí iteračního Remesova algoritmu . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Optimalizační algoritmus programu NAPFIL</b>	<b>15</b>
3.1	Optimalizační algoritmus . . . . .	15
3.1.1	Úvod . . . . .	15
3.1.2	Transformace proměnných $y \rightarrow x$ . . . . .	16
3.1.3	Funkce $b(x)$ . . . . .	19
3.1.4	Optimalizační procedura . . . . .	19
3.1.5	Určení přenosové funkce . . . . .	21
3.2	Použité numerické metody . . . . .	23
3.2.1	Extrémy funkce $b(x)$ . . . . .	23
3.2.2	Lineární interpolace . . . . .	25
3.2.3	Řešení soustavy lineárních rovnic . . . . .	27

3.2.4	Výpočet kořenů polynomu . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Program NAPFIL</b>	<b>29</b>
4.1	Popis a struktura programu . . . . .	29
4.1.1	Bloková struktura programu . . . . .	29
4.2	Práce s programem . . . . .	32
4.2.1	Uživatelské rozhraní . . . . .	32
4.2.2	Struktura menu . . . . .	32
4.2.3	Položky menu . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Příklady a kontrola výsledků</b>	<b>42</b>
5.1	Návrh dolní propusti . . . . .	42
5.1.1	Výsledky příkladu . . . . .	42
5.2	Návrh pásmové propusti . . . . .	43
5.2.1	Výsledky příkladu . . . . .	49
5.3	Návrh horní propusti . . . . .	50
5.3.1	Výsledky příkladu . . . . .	50
5.4	Problémy při návrhu . . . . .	59
5.5	Ověření výsledků . . . . .	59
<b>Závěr</b>		<b>60</b>

# Seznam obrázků

1.1	Stupňovité toleranční schéma . . . . .	2
1.2	Poloha nul v komplexní rovině . . . . .	7
3.1	Transformace $y \rightarrow x$ . . . . .	18
3.2	Iterační proces . . . . .	20
3.3	Vývojový diagram optimalizačního algoritmu . . . . .	22
3.4	Lineární interpolace . . . . .	26
4.1	Bloková struktura programu <i>NAPFIL</i> . . . . .	30
4.2	Roletové menu . . . . .	33
4.3	Zadání tolerančního schématu . . . . .	34
4.4	Zadání propustného pásma pásmové propusti . . . . .	34
4.5	Editace singularit . . . . .	36
4.6	Způsob zachycení útlumové charakteristiky . . . . .	37
4.7	Zadání standardního tolerančního schématu dolní propusti . . . . .	38
4.8	Výsledky Caurovy aproximace . . . . .	39
4.9	Spuštění optimalizačního algoritmu . . . . .	40
4.10	Parametry optimalizačního algoritmu . . . . .	40
4.11	Výsledky aproximace . . . . .	41
4.12	Přenosová funkce . . . . .	41
5.1	Toleranční schéma dolní propusti . . . . .	43
5.2	Průběh provozního útlumu dolní propusti . . . . .	45
5.3	Průběh provozního útlumu dolní propusti v propustném pásmu . . . . .	46
5.4	Průběh provozního útlumu dolní propusti v nepropustném pásmu . . . . .	47
5.5	Průběh provozního útlumu dolní propusti v nepropustném pásmu – detail . . . . .	48
5.6	Toleranční schéma pásmové propusti . . . . .	49
5.7	Průběh provozního útlumu pásmové propusti . . . . .	51
5.8	Průběh provozního útlumu pásmové propusti v propustném pásmu . . . . .	52
5.9	Průběh provozního útlumu pásmové propusti v nepropustném pásmu – detail . . . . .	53
5.10	Toleranční schéma horní propusti . . . . .	54
5.11	Průběh provozního útlumu horní propusti . . . . .	55

5.12 Průběh provozního útlumu horní propusti v propustném pásmu . . . . .	56
5.13 Průběh provozního útlumu horní propusti v propustném pásmu – detail . . . . .	57
5.14 Průběh provozního útlumu horní propusti v nepropustném pásmu . . . . .	58

# Seznam tabulek

3.1	Přehled transformací $y \rightarrow x$ . . . . .	17
3.2	Hodnoty $w$ , $x_i$ a $m'_i$ pro všechny typy filtrů . . . . .	17
4.1	Struktura roletových menu programu <i>NAPFIL</i> . . . . .	32
5.1	Nuly a póly optimalizované charakteristické funkce dolní propusti	44
5.2	Nuly normované přenosové funkce $G(p)$ dolní propusti . . . . .	44
5.3	Nuly a póly optimalizované charakteristické funkce pásmové propusti	49
5.4	Nuly normované přenosové funkce $G(p)$ pásmové propusti . . . . .	50
5.5	Nuly a póly optimalizované charakteristické funkce horní propusti	54
5.6	Nuly normované přenosové funkce $G(p)$ horní propusti . . . . .	54

# Kapitola 1

## Úvod do problematiky

### 1.1 Postup při návrhu elektrických filtrů

Problematika návrhu filtrů je již propracována do značné hloubky. Postup při návrhu filtru bychom mohli shrnout do následujících bodů.

- **Zadání** - Nejčastěji požadavek na průběh přenosu (útlumu) v závislosti na frekvenci. Tento požadavek bývá popsán tzv. *tolerančním schématem*, které určuje meze přenosové (útlumové) charakteristiky, definuje propustné a nepropustné pásmo. Toleranční schéma může být zadáno jako:
  - **Jednoduché** - čtyři základní formy tolerančního schématu pro všechny typy filtrů (*dolní propust, horní propust, pásmová propust a pásmová zadrž*).
  - **Stupňovité** - často se také označuje jako „schodovité“ -viz obr. ?? . V souvislosti s nestandardními aproximacemi se vychází právě ze stupňovitého tolerančního schématu. Zpravidla snižuje požadavky na stupeň filtru.

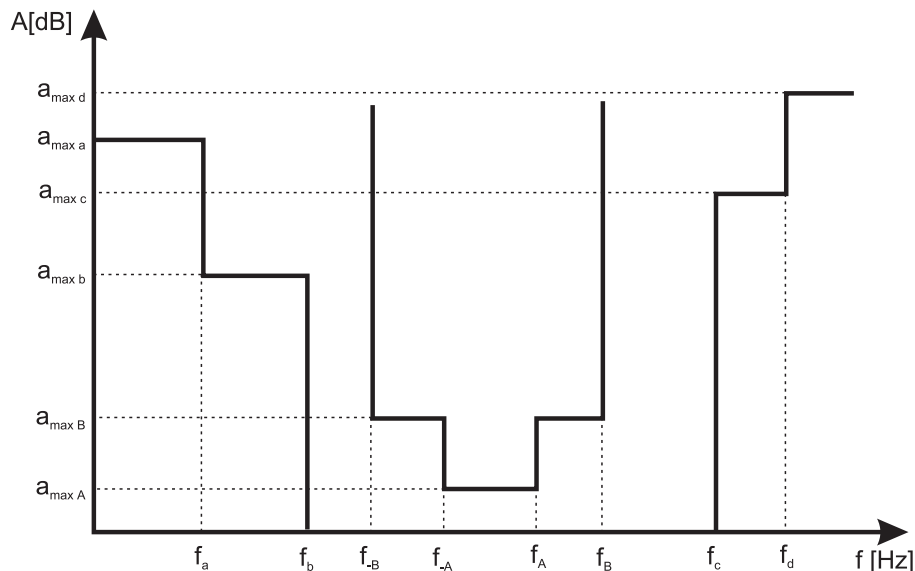
Často jsou vstupními parametry ještě další údaje např. požadavek na fázovou charakteristiku (skupinové zpoždění), časová odezva filtru atd.

Při zpracování zadání se velmi často provádí zpřísnění požadavků s ohledem na rezervy nutné pro respektování skutečných vlastností elektronických prvků při realizaci. Zpřísnění provádíme na obou osách tolerančního schématu.

- **Aproximace** - Úlohou aproximace je najít k zadanému tolerančnímu schématu přenosovou funkci. Aproximační úlohu můžeme rozdělit na :
  - **Standardní** - Jako standardní aproximace jsou označovány ty, které vycházejí z řešení charakteristické rovnice filtru :

$$G(p)G(-p) = 1 + \varphi(p)\varphi(-p) \quad (1.1)$$





Obrázek 1.1: Stupňovité toleranční schéma

kde  $\varphi(p)$  je charakteristická funkce a  $G(p)$  je provozní činitel přenosu. Provozní útlum v decibelech [dB] vyjádřený z této rovnice je dán vztahem :

$$a(\omega) = 10 \log |G(j\omega)|^2 = 10 \log(1 + |\varphi(j\omega)|^2) \quad (1.2)$$

Z této rovnice vyplývá že:

- \* Nuly charakteristické funkce  $\varphi(j\omega)$  jsou zároveň nulami provozního útlumu  $a(\omega)$ .
- \* Póly charakteristické funkce  $\varphi(j\omega)$  jsou současně útlumovými póly  $a(\omega)$ .
- \* V nepropustném pásmu je dán útlum filtru přibližně průběhem charakteristické funkce dle vztahu  $a(\omega) \doteq 20 \log |\varphi(j\omega)|$ .

Vztahy 1.1 a 1.2 jsou výchozími rovnicemi pro řešení aproximační úlohy filtru. Charakteristickou funkci  $\varphi(p)$  lze volit a tím určit průběh útlumu filtru v propustném a nepropustném pásmu :

- \* **Butterworth** - maximálně plochá charakteristika
- \* **Čebyšev** - izoextremální charakteristika v propustném pásmu
- \* **Inverzní Čebyšev** - izoextremální charakteristika v nepropustném pásmu
- \* **Cauer** - izoextremální průběh v obou pásmech

Standardní aproximace jsou metody deterministické. Velmi často jsou tyto typy aproximací tabelovány, ať už ve formě přímo tabulek nebo výpočetních vztahů.

- **Nestandardní** - Nestandardní aproximace jsou výpočetně náročnější, neboť používají iterační postupy, ale často vedou ke snížení stupně filtru  $\Rightarrow$  jednodušší konstrukce. Nestandardní aproximace obvykle před-

pokládají určitou výchozí volbu přenosové funkce, na kterou je aplikován iterační proces, který tuto přenosovou funkci optimalizuje na žádaný průběh. Jsou výhodné pro složitější toleranční (stupňovitá) schémata, protože umožňují sledováním tvaru snížit stupeň přenosové funkce. Pro určení prvotního odhadu průběhu přenosové funkce se použije standardní aproximace. V dalším kroku se stupeň přenosové funkce iteračním postupem sníží. Nestandardní aproximace se obvykle používají na ty typy tolerančních schémat, u kterých dojde při transformaci na normovanou dolní propust ke zpřísnění požadavků, a tím ke zvýšení stupně filtru. Jsou to především nesymetrické pásmové propusti a „schodovitá“ toleranční schémata.

- **Návrh filtru s ideálními prvky**
- **Zahrnutí reálných vlastností prvků filtru**
- **Simulace obvodové struktury**
- **Porovnání výsledků se vstupními požadavky** - Pokud nevyhovují → optimalizace.
- **Obvodová realizace**

## 1.2 Přehled standardních aproximací

Pro představu o základních vlastnostech standardních aproximací uvádím na tomto místě stručný přehled těchto typů aproximačních úloh.

### 1.2.1 Butterworthova aproximace

Butterworthova aproximace má monotónní průběh útlumu v propustném i nepropustném pásmu. Nulové body  $G(p)$  leží na kružnici s poloměrem  $\epsilon$ .

$$\epsilon = \sqrt{10^{\frac{a_{max}}{10}} - 1}$$

Průběh útlumu odpovídá charakteristické funkci  $\varphi(p) = \epsilon p^n$ , kde  $n$  je stupeň přenosové funkce, tedy

$$G(p)G(-p) = 1 + \epsilon^2(-1)^n p^{2n}$$

Výhodou Butterworthovy aproximace je velmi jednoduchý návrh filtru. Stačí jedna tabulka pro  $a_{max} = 3dB$ , ze které lze pomocí konstanty  $\epsilon$  vypočítat potřebné hodnoty.

## 1.2.2 Čebyševova aproximace

Při Čebyševově aproximaci jde o izoextremální aproximaci nulového útlumu ideální dolní propusti v propustném pásmu. Tato aproximace minimalizuje absolutní chybu aproximující funkce.

Nulové body  $G(p)$  leží na elipse. Charakteristickou funkci  $\varphi(p)$  volíme  $\varphi(p) = \epsilon T_n(p)$ , kde  $T_n(p)$  je Čebyševův polynom prvního druhu. Platí tedy

$$G(p)G(-p) = 1 + \epsilon^2 T_n(p)T_n(-p)$$

Z průběhu provozního útlumu je zřejmé, že oproti Butterworthově aproximaci budou horší výsledné fázové charakteristiky. Tato aproximace dosahuje ale vyšší strmosti útlumové charakteristiky v přechodovém pásmu a tím v řadě případů i snížení stupně přenosové funkce.

Pro návrh lze opět využít tabulky, které jsou již ale různé pro různé hodnoty  $a_{max}$ .

## 1.2.3 Inverzní Čebyševova aproximace

Tato aproximace má monotonní průběh v propustném pásmu. Mez propustného pásma je u NDP na kmitočtu  $\Omega = 1$ . Charakteristickou funkci volíme takto

$$\varphi(p) = \frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{p}\right)}$$

kde  $\varphi(p)$  je charakteristická funkce pro normální Čebyševovu aproximaci. Tento typ aproximace není v praxi příliš často používán, proto je také velmi omezená možnost použití katalogu.

## 1.2.4 Cauerova aproximace

Útlumové charakteristiky Cauerových filtrů jsou izoextremální v propustném i nepropustném pásmu. Na strmost útlumové charakteristiky v přechodném pásmu má vliv jak stupeň aproximace, tak poloha útlumových pólů v nepropustném pásmu, zejména prvního pólu.

Jako charakteristická funkce  $\varphi(p)$  je volena Zolotareva funkce, která je řešením diferenciální rovnice eliptického typu. Návrhové vztahy pro tuto aproximaci jsou značně složitější než pro aproximace předchozí.

Při praktickém návrhu lze opět využít katalog. Vzhledem k existenci pólů útlumu v nepropustném pásmu, musí příčková struktura NDP obsahovat rezonanční obvody. Proto již neplatí, že stupeň přenosové funkce se shoduje s počtem součástek.

## 1.3 Přehled nestandardních aproximací

Před nástupem počítačové techniky nebyly nestandardní aproximační metody v praxi často používány, zejména pro svou výpočetní náročnost.

Úkolem aproximace je vlastně přechod od tolerančního schématu k přenosové funkci lineárního obvodu. Toleranční schéma je definováno požadovaným útlumem na dané frekvenci. Je to tedy funkce jedné reálné proměnné, na rozdíl od přenosové funkce komplexní proměnné. Tento přechod je u nestandardních aproximačních metod obtížně řešitelný.

Podívejme se teď na základní princip několika nejpoužívanějších metod.

### 1.3.1 Asymptotická aproximace lomenými přímkami (Bóde)

Tato metoda používá pro vyjádření vlivu nul a pólů přenosové funkce na kmitočtovou závislost útlumu šablon ve tvaru přímek se strmostí  $\pm 20$  dB/dek u reálných kořenů a  $\pm 40$  dB/dek u kořenů komplexně sdružených. Substitucí těchto přímek získáme asymptotickou charakteristiku, která aproximuje skutečnou útlumovou charakteristiku.

### 1.3.2 Rumpeltova šablona

Tato metoda vychází z normované dolní propusti, může tedy často vést ke zpřísnění požadavků na stupeň filtru. K výpočtu je kromě zadání tolerančního schématu potřeba provést počáteční odhad umístění nul a pólů přenosové funkce. Útlumové charakteristiky těchto kořenů se převádí jednoduchou transformací na průběh jedné šablony.

### 1.3.3 Danielsova šablonová metoda

Umožňuje navrhovat pásmové propusti a to jak nesymetrické, tak se stupňovitým průběhem tolerančního schématu v nepropustném pásmu. Metoda vyžaduje pouze odhad pólů přenosové funkce. Danielsova metoda je popsána v [?] a je implementována v programu *NAP*.

## 1.4 Matematický popis filtru

Matematický popis elektrického filtru vychází z přenosové funkce dvojbranu. Předpokládejme, že jsme na základě zadaných požadavků získali vhodnou aproximační metodou přenosovou funkci  $G(p) = \frac{1}{H(p)}$ , která je definována podílem vstupní veličiny k výstupní<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>V „klasické“ teorii filtrů se téměř výhradně používá podíl vstupní veličiny k výstupní. Veličina  $G(p)$  se označuje jako provozní činitel přenosu. Budeme-li dále hovořit o přenosové

$$G(p) = \frac{1}{H(p)} = \frac{U_1(p)}{U_2(p)} = K \cdot \frac{(p - p_{z1})(p - p_{z2}) \cdots (p - p_{zr})}{(p - p_{p1})(p - p_{p2}) \cdots (p - p_{ps})} = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^r (p - p_{zi})}{\prod_{j=1}^s (p - p_{pj})} \quad (1.3)$$

kde  $K$  je reálná konstanta,  $p_{zi}$  jsou nulové body a  $p_{pj}$  jsou póly funkce  $G(p)$ .

Vlastnosti daného obvodu jsou plně charakterizovány polohou nul a pólů v komplexní rovině. Nuly přenosové funkce mohou být buď reálné nebo komplexně sdružené a můžeme je tedy vyjádřit alternativními vztahy

$$p_z = -\alpha \quad (1.4)$$

$$p_z, p_z^* = -\alpha \pm j\beta \quad (1.5)$$

Záporné znaménko u reálné části vyjadřuje skutečnost, že všechny dílčí nuly přenosové funkce  $G(p)$  musí ležet v levé části komplexní roviny kvůli stabilitě obvodu. Podle obrázku ?? lze polohu komplexně sdružené dvojice nul v rovině  $p = \sigma + j\omega$  vyjádřit pomocí dvou parametrů

$$\omega_z = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad (1.6)$$

$$Q_z = \frac{\omega_z}{2|\alpha|} \quad (1.7)$$

Souvislost kmitočtu  $\omega_z$  a činitele tvaru  $Q_z$  je zřejmá z obrázku ?. Pro  $|\alpha| = 0$  se činitel tvaru  $Q_z$  blíží k nekonečnu a pro  $\beta = 0$  je  $\omega_z = |\alpha|$ , takže  $Q_z = 1/2$ . Kmitočtem  $\omega_z$  jsou určeny body zlomu asymptot modulové charakteristiky, činitel tvaru  $Q_z$  ovlivňuje její tvar. Jak víme z teorie elektrických obvodů, má na stabilitu celého obvodu vliv především rozložení nul přenosové funkce v komplexní rovině. Proto je třeba dodržovat malé hodnoty činitele  $Q_z$  nejen z hlediska stability obvodu, ale i z důvodů dynamického rozsahu a rozptylu hodnot součástek.

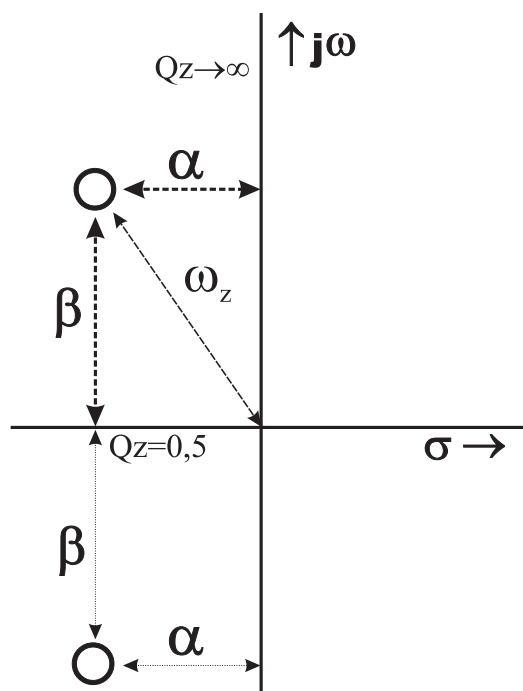
### 1.4.1 Přenosová funkce filtru

Při návrhu elektrických filtrů je největší důraz kladen na jejich přenosovou funkci.

Připomeňme, že nuly přenosové funkce  $G(p)$  musí ležet v levé části komplexní roviny a mohou být jednoduché reálné nebo komplexně sdružené. Póly mohou ležet kdekoli v komplexní rovině a jsou také jednoduché reálné nebo komplexně sdružené. V případě pasivních reaktančních obvodů leží póly přenosové funkce na imaginární ose, tedy  $Qp = \infty$ . Totéž se předpokládá i ve většině aplikací aktivních filtrů.

Přenosovou funkci ?? můžeme po sloučení komplexních kořenů a po respektování předešlých úvah zapsat ve tvaru

funkci budeme mít na mysli funkci  $G(p)$ .



Obrázek 1.2: Poloha nul v komplexní rovině

$$G(p) = \frac{\prod_{i=1}^k (p - \alpha_i) \prod_{i=1}^{nz} (p^2 + p \frac{\omega_{zi}}{Q_{zi}} + \omega_{zi}^2)}{p^{p_0} \prod_{j=1}^{np} (p^2 + \omega_{pj}^2)} \quad (1.8)$$

kde  $k$  je počet reálných nulových bodů,  $\alpha_i$  jsou souřadnice reálných nulových bodů,  $nz$  je počet komplexně sdružených dvojic nulových bodů,  $np$  je počet komplexně sdružených dvojic pólů,  $p_0$  je počet pólů ležících v počátku,  $\omega_{zi}, Q_{zi}$  jsou souřadnice nulových bodů,  $\omega_{pj}$  jsou frekvence pólů.

### 1.4.2 Vlastnosti funkcí $G(p)$ a $\varphi(p)$

Zaveďme nyní funkci  $G(p)$  jako podíl dvou polynomů  $G(p) = 1/H(p) = v(p)/f(p)$ , přičemž  $v(p)$  je obecný polynom, kdežto  $f(p)$  je sudý nebo lichý polynom.

Potom platí

$$G(-p) = \frac{v(-p)}{f(-p)}$$

takže

$$G(p)G(-p) = \frac{v(p)v(-p)}{f(p)f(-p)}$$

Jestliže budeme předpokládat, že také charakteristická funkce  $\varphi(p)$  je podílem dvou polynomů, můžeme psát

$$G(p)G(-p) = 1 + \varphi(p)\varphi(-p) = 1 + \frac{h(p)h(-p)}{f(p)f(-p)} \quad (1.9)$$

Vztah ?? je zřejmý proto, že musí platit

$$\frac{v(p)v(-p)}{f(p)f(-p)} = 1 + \frac{h(p)h(-p)}{f(p)f(-p)} = \frac{f(p)f(-p) + h(p)h(-p)}{f(p)f(-p)} \quad (1.10)$$

Tři polynomy, které popisují vlastnosti reaktančního dvojbranu, jsou spolu vázány rovnicí

$$v(p)v(-p) = f(p)f(-p) + h(p)h(-p) \quad (1.11)$$

Charakteristická funkce je tedy podle rovnice ?? opravdu obecně dána podílem dvou polynomů ve tvaru

$$\varphi(p) = \frac{h(p)}{f(p)} \quad (1.12)$$

Dříve jsme uvedli, že  $f(p)$  je sudý nebo lichý polynom. Proto můžeme použít vztahu

$$f(p)f(-p) = \pm f^2(p)$$

Kladné znaménko platí pro sudý a záporné pro lichý polynom  $f(p)$ .  
Dále můžeme psát

$$\Gamma(p) = \frac{\varphi(p)}{G(p)} = \frac{\frac{h(p)}{f(p)}}{\frac{v(p)}{f(p)}} = \frac{h(p)}{v(p)} \quad (1.13)$$

kde polynomy  $v(p)$  a  $f(p)$  určují i součinitel odrazu.

Všimněme si nyní základních vlastností polynomů  $v(p)$ ,  $h(p)$  a  $f(p)$ .

- Polynom  $v(p)$  je polynom s reálnými součiniteli, jehož nulové body leží v levé polorovině.
- Polynom  $f(p)$  musí být sudý nebo lichý polynom komplexní frekvence  $p$  s reálnými součiniteli.
- Polynom  $h(p)$  je s polynomy  $f(p)$  a  $v(p)$  vázán rovnicí ??

### 1.4.3 Určení přenosové funkce z charakteristické funkce

Výsledkem nestandardní aproximační úlohy jsou frekvence nul a pólů charakteristické funkce  $\varphi(p)$  a násobná konstanta charakteristické funkce  $C_\varphi$ . Charakteristická funkce má tedy tvar

$$\varphi(p) = C_\varphi \frac{\prod_{i=1}^{nz} (p^2 + \omega_{z_i}^2)^{mz_i}}{p^{p_0} \prod_{j=1}^{np} (p^2 + \omega_{p_j}^2)^{mp_j}} = \frac{h(p)}{f(p)} \quad (1.14)$$

kde  $p_0$  je počet útlumových pólů ležících v nule,  $nz$  resp.  $np$  je počet komplexně sdružených dvojic nulových bodů resp. pólů,  $\omega_{z_i}$  resp.  $\omega_{p_j}$  jsou kmitočty nul resp. pólů,  $mz_i$  resp.  $mp_j$  jsou násobnosti nul resp. pólů na daných kmitočtech<sup>2</sup>.

Při hledání přenosové funkce  $G(p)$  vyjdeme z poznatků, které jsme uvedli v předcházejícím textu. Polynom  $f(p)$  je jmenovatelem obou funkcí, tedy  $G(p)$  a  $\varphi(p)$ . Zbývá jen určit polynom  $v(p)$  v čitateli přenosové funkce  $G(p)$ . Ten určíme z rovnice ???. Po dosažení do této rovnice dostaneme

$$v(p)v(-p) = C_\varphi^2 \prod_{i=1}^{nz} (p^2 + \omega_{z_i}^2)^2 + p^{2p_0} \prod_{j=1}^{np} (p^2 + \omega_{p_j}^2)^2 \quad (1.15)$$

Po úpravě dostaneme na pravé straně sudý polynom. Jeho řešením získáme kořeny násobku dvou polynomů  $v(p)v(-p)$ . Jak vyplývá z vlastností přenosové funkce elektrického filtru, musí mít polynom  $v(p)$  nulové body v levé části komplexní roviny. Tímto způsobem jsme určili i čítec přenosové funkce  $G(p)$  a můžeme ji tedy zapsat

$$G(p) = G \cdot \frac{\prod_{i=1}^{nz} (p^2 - 2\alpha_i p + \alpha_i^2 + \beta_i^2)}{p^{p_0} \prod_{j=1}^{np} (p^2 + \omega_{p_j}^2)} \quad (1.16)$$

kde  $G$  je násobná konstanta přenosové funkce  $G(p)$ ,  $nz$  je počet nulových bodů přenosové funkce,  $\alpha_i$  jsou reálné části kořenů polynomu  $v(p)$ ,  $\beta_i$  jsou imaginární části kořenů polynomu  $v(p)$ ,  $p_0$  je počet pólů v nulovém kmitočtu,  $np$  je počet pólů přenosu a  $\omega_{p_j}$  jsou kmitočty pólů přenosu.

---

<sup>2</sup>Budeme dále předpokládat, že násobnosti  $mz_i$  a  $mp_j$  jsou jednotkové.



# Kapitola 2

## Remesův druhý algoritmus

Obsahem této kapitoly je popis iteračního algoritmu aproximace funkce  $f(x)$  racionální funkcí. To je základní problém při hledání přenosové funkce selektivní soustavy. V tomto případě je aproximována funkce daná tolerančním schématem a výsledkem je aproximující funkce, tedy útlumová (přenosová) funkce filtru.

Optimalizační algoritmus použitý v programu *NAPFIL* vychází z Remesova druhého algoritmu. Proto je zde tento algoritmus detailně a názorně rozebrán.

### 2.1 Základní předpoklady

Nechť

$$R_{mk}(x) = \frac{P_m(x)}{Q_k(x)} \quad (2.1)$$

je racionální aproximace funkce  $f(x)$ , kde  $P_m(x)$ , resp.  $Q_k(x)$  jsou polynomy stupně nejvýše  $m$ , resp.  $k$ . Číslo  $N = m + k$  nazýváme indexem funkce  $R_{mk}(x)$ . Počet koeficientů, které jsou v  $R_{mk}$  k dispozici, je  $N + 1$ , protože jeden z  $N + 2$  koeficientů v čitateli a jmenovateli je volitelný. Všeobecně platí, že čím vyšší index, tím vyšší přesnost aproximace. Při aproximování určité funkce na intervalech, které nás zajímají, všechny aproximace se stejným indexem vyžadují, na rozdíl od aproximací s jinými indexy, podobný objem výpočtů a dosahují podobné přesnosti.

### 2.2 Čebyševova věta o nejlepší aproximaci

Nechť  $f(x)$  je spojitá funkce, kterou chceme aproximovat racionální funkcí ve tvaru ?? na konečném intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Položme

$$r_{mk} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - R_{mk}(x)| \quad (2.2)$$

pro libovolnou racionální funkci

$$R_{mk}(x) = \frac{P_m(x)}{Q_k(x)} = \frac{\sum_{j=0}^m a_j x^j}{\sum_{j=0}^k b_j x^j} \quad (2.3)$$

Pak můžeme dokázat následující větu.

**Čebyševova věta o nejlepší aproximaci :** *Existuje právě jedna racionální funkce  $R_{mk}(x)$ , která minimalizuje  $r_{mk}$  (nepovažujeme-li za různé dvě racionální funkce, které se sobě rovnají po zkrácení). Napišme tuto racionální funkci ve tvaru*

$$R_{mk}^* = \frac{P_m^*(x)}{Q_k^*(x)} = \frac{\sum_{j=0}^{m-\nu} a_{(j+\nu)} x^j}{\sum_{j=0}^{m-\mu} b_{(j+\mu)} x^j} \quad (2.4)$$

kde

$$0 \leq \mu \leq k$$

$$0 \leq \nu \leq m$$

$$a_m \neq 0$$

$$b_k \neq 0$$

a zlomek  $\frac{P_m^*(x)}{Q_k^*(x)}$  nelze zkrátit. Necht  $r_{mk}^* \neq 0$ . Pak počet po sobě jdoucích bodů intervalu  $\langle a, b \rangle$ , v nichž rozdíl  $f(x) - R_{mk}^*(x)$  nabývá se střídavými znaménky hodnoty  $r_{mk}^*$ , není menší než číslo  $L = m + k + 2 - d$ , kde  $d = \min(\mu, \nu)$ .

## 2.3 Konstrukce Čebyševovy aproximace pomocí iteračního Remesova algoritmu

Remesův druhý algoritmus je jedním z řady známých algoritmů pro konstrukci pravé Čebyševovy aproximace při daném  $m$  a  $k$ . Algoritmus vychází z počáteční aproximace, ze které odvozuje posloupnost aproximací konvergujících k Čebyševově aproximaci.

Pro jednoduchost budeme předpokládat, že pro Čebyševovu aproximaci funkce  $f(x)$  v intervalu  $\langle a, b \rangle$  tvaru ?? existuje nejméně  $N + 2 = m + k + 2$  bodů, ve kterých nabývá její chyba extrémů. To značí, že předpokládáme, že číslo  $d$  je rovno nule<sup>1</sup>. Bez ztráty obecnosti můžeme také předpokládat, že interval  $\langle a, b \rangle$  obsahuje bod  $x = 0$ , takže můžeme položit  $b_0 = 1$ .

<sup>1</sup>Degenerace ( $d \neq 0$ ) může nastat, je-li funkce  $f(x)$  sudá nebo lichá v intervalu  $\langle a, b \rangle$ . S výjimkou podobných triviálních případů se tato degenerace objevuje pouze v některých zcela patologických případech. Ale případy blízké degenerovaným, kdy polynomy  $P_m^*(x)$  a  $Q_k^*(x)$  mají skoro stejné činitele, jsou častější a mohou způsobit při výpočtu vážné obtíže.

Je dána spojitá funkce  $f(x)$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$  obsahujícím bod 0 a čísla  $m$  a  $k$ . Naším úkolem je určit Čebyševovu aproximaci  $R_{mk}^*(x)$  tvaru ?? funkce  $f(x)$  v intervalu  $\langle a, b \rangle$ .

Předpokládejme, že jsme nějakým způsobem získali počáteční aproximaci

$$R_{mk}^{(0)}(x) = \frac{\sum_{j=0}^m a_j x^j}{\sum_{j=0}^k b_j x^j} \quad (2.5)$$

$$b_0 = 1$$

která má tu vlastnost, že rozdíl  $f(x) - R_{mk}^{(0)}(x)$  má  $N + 2$  po sobě jdoucích extrémů, které střídají znaménka. Druhý Remesův algoritmus pak spočívá v těchto krocích :

1. Necht'  $x_0^{(0)} < x_1^{(0)} < \dots < x_{N+1}^{(0)}$  značí  $N + 2$  bodů, ve kterých nabývá rozdíl  $f(x) - R_{mk}^{(0)}(x)$  lokálních extrémů, které střídají znaménka.
2. Řešme soustavu  $N + 2$  nelineárních rovnic

$$f(x_i^{(0)}) - \frac{\sum_{j=0}^m a_j (x_i^{(0)})^j}{\sum_{j=0}^k b_j (x_i^{(0)})^j} = (-1)^i E \quad (2.6)$$

$$i = 0, \dots, N + 1$$

pro  $N + 2$  neznámých  $a_0, \dots, a_m, b_1, \dots, b_k$  a  $E$  a označme řešení  $a_0^{(0)}, \dots, a_m^{(0)}, b_1^{(0)}, \dots, b_k^{(0)}$  a  $E^{(0)}$ . Všimněme si, že  $E^{(0)}$  je velikost chyby aproximace v každém z bodů  $x_i^{(0)}$ .

3. Definujme

$$h_0(x) = f(x) - \frac{\sum_{j=0}^m a_j^{(0)} x^j}{\sum_{j=0}^k b_j^{(0)} x^j} \quad (2.7)$$

$$b_0^{(0)} = 1$$

Funkce  $h_0(x)$  nabývá pak se střídavými znaménky hodnoty  $|E^{(0)}|$  v bodech  $x_i^{(0)}$ ,  $i = 0, \dots, N + 1$ . Není proto těžké ukázat, že v okolí každého bodu  $x_i^{(0)}$  existuje bod  $x_i^{(1)}$ , ve kterém funkce  $h_0(x)$  má extrém stejného znaménka jako rozdíl  $f(x) - R_{mk}^{(0)}(x)$  v bodě  $x_i^{(0)}$ . Nahraďme každý z bodů  $x_i^{(0)}$  bodem  $x_i^{(1)}$ . Je-li bod  $\bar{x}$ , ve kterém funkce  $|h_0(x)|$  nabývá absolutního extrému, jedním z bodů  $x_i^{(1)}$ , pokračujme podle bodu 4. Není-li tomu tak, nahraďme jeden z bodů  $x_i^{(1)}$  bodem  $\bar{x}$ , aby funkce  $h_0(x)$  opět střídala znaménka v bodech  $x_i^{(1)}$ . Toto lze vždy dosáhnout.

4. Opakujeme kroky 2 a 3 s tím, že v soustavě ?? uijeme bodů  $x_0^{(1)}, \dots, x_{N+1}^{(1)}$ .

Tímto postupem jsme zkonstruovali posloupnost aproximací tvaru ??, která konverguje stejnoměrně k funkci  $R_{mk}^*(x)$ , jsou-li body počátečních extrémů  $x_i^{(0)}$ ,  $i = 0, \dots, N + 1$  dostatečně blízké k příslušným bodům, ve kterých nabývá rozdíl  $f(x) - R_{mk}^*(x)$  extrémů.

K uvedenému algoritmu je nutno připojit několik poznámek :

- Je-li  $k = 0$ , konverguje tento iterační postup při libovolné volbě  $N + 2$  bodů v kroku 1. To znamená, že není třeba počáteční aproximace. Je-li však  $k \neq 0$ , lze jen tvrdit, že existuje  $\epsilon > 0$  tak, že algoritmus konverguje, liší-li se každý bod, ve kterém rozdíl  $f(x) - R_{mk}^{(0)}(x)$  nabývá extrému, od příslušného bodu extrému rozdílu  $f(x) - R_{mk}^*(x)$  o méně než  $\epsilon$ . Nepotřebujeme tedy aproximaci tvaru  $R_{mk}^{(0)}(x)$ , nýbrž množinu bodů ležících dostatečně blízko bodům, ve kterých nabývá rozdíl  $f(x) - R_{mk}^*(x)$  extrémů. Mohli bychom například užít  $N + 2$  bodů, ve kterých nabývá extrémů Čebyševův polynom  $T_{N+1}(x)$ , vhodně rozdělených na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Ve většině případů je však nutné k tomu, abychom získali množinu  $N + 2$  bodů  $x_i^{(0)}$ , pro kterou algoritmus konverguje, sestavit nejprve aproximaci  $R_{mk}^{(0)}(x)$ .
- Je-li  $k = 0$ , jsou rovnice v bodě 2 algoritmu lineární, a tedy velmi snadno řešitelné. Je-li  $k \neq 0$ , může být nelineární soustava rovnic řešena například takto :

– Přepíšme soustavu ?? do následujícího tvaru

$$\sum_{j=0}^m a_j (x_i^{(0)})^j - [f(x_i^{(0)}) - (-1)^i E_l] \sum_{j=1}^k b_j (x_i^{(0)})^j = f(x_i^{(0)}) - (-1)^i E_{l+1} \quad (2.8)$$

$$i = 0, \dots, N + 1$$

$$l = 0, 1, \dots$$

- Zvolme vhodnou počáteční hodnotu  $E_0$  a řešme lineární soustavu rovnic ?? pro neznámé  $a_0, \dots, a_m, b_1, \dots, b_k$  a  $E_{l+1}$  pro  $l = 0, 1, \dots$  tak dlouho, až dvě po sobě následující hodnoty  $E_l$  jsou stejné. V praxi se zřídka ukázalo, že by byly nějaké potíže s konvergencí této metody.
- Problém nalezení extrémů funkce  $h_0(x)$  je početně takřka nezvládnutelný, chceme-li přesné řešení. Protože však extrémy funkce  $h_0(x)$  budou blízké extrémům rozdílu  $f(x) - R_{mk}^{(0)}(x)$  (a podobně v následujících fázích iteračního postupu), stačí v praxi hledat na nějaké síti v okolí bodu  $x_i^{(0)}$  tak dlouho, až určíme přibližnou polohu bodu, ve kterém nabývá funkce  $h_0(x)$  extrému. Bod  $x_i^{(1)}$  pak nalezneme jako bod, ve kterém je derivace chyby nulová, a to pomocí jednoho kroku lineární nebo kvadratické inverzní interpolace.

- Uvedeného algoritmu lze užít i v případě aproximace tvaru  $s(x)R_{mk}(x)$ , kde  $s(x)$  je spojitá funkce, která není rovna nule v intervalu  $(a, b)$ .

# Kapitola 3

## Optimalizační algoritmus programu *NAPFIL*

V této kapitole bude podrobně popsán modifikovaný Remesův optimalizační algoritmus tak, jak byl použit v programu *NAPFIL*. Algoritmus je popsán co nejdrobněji a všechny kroky jsou detailně komentovány. Další informace, vztahující se k tomuto tématu, může čtenář najít v [?], [?], [?], [?].

V závěru této kapitoly jsou popsány numerické metody, které byly použity při implementaci algoritmu programem *NAPFIL*.

### 3.1 Optimalizační algoritmus

#### 3.1.1 Úvod

Přenosová funkce filtru  $G(p)$  je určena na základě následujících vstupních požadavků

$$\begin{aligned} a(\omega) &\geq a_s(\omega) && \dots \text{ v nepropustném pásmu} \\ 0 \leq a(\omega) &\leq a_s(\omega) && \dots \text{ v propustném pásmu} \end{aligned}$$

kde  $a(\omega)$  je provozní útlum daný vztahem

$$a(\omega) = 10 \log |G(j\omega)|^2 = -10 \log |H(j\omega)|^2$$

a  $a_s(\omega)$  je vlastně mez průběhu provozního útlumu zadaná uživatelem (toleranční schéma). V tomto okamžiku je vhodné zavést charakteristickou funkci<sup>1</sup>, kterou značíme  $\varphi(p)$

$$G(p)G(-p) = \frac{1}{H(p)H(-p)} = 1 + \varphi(p)\varphi(-p) \quad (3.1)$$

---

<sup>1</sup>V zahraniční literatuře bývá charakteristická funkce často označována symbolem  $K(p)$ .

Vlastnosti charakteristické funkce  $\varphi(p)$  byly podrobně diskutovány v kapitole, která se zabývala matematickým popisem filtru. Předpokládejme, že všechny útlumové nuly i póly charakteristické funkce jsou umístěny na imaginární ose frekvenční roviny, tedy  $p = j\omega$ . Potom můžeme charakteristickou funkci zapsat takto

$$\begin{aligned} \varphi(p) &= C_k \cdot p^{-m_0} \prod_{i=1}^n (p^2 + \omega_i^2)^{-m_i} & (3.2) \\ \omega_i &\neq 0, \infty \\ i &= 1, \dots, n \end{aligned}$$

kde kladné hodnoty  $m_i (i = 0, 1, \dots, n)$  určují útlumové póly a záporné hodnoty  $m_i$  útlumové nuly. Konstantu  $m_i$  nazýváme násobností singularity. Násobnost  $m_\infty$  singularity v nekonečnu nemusí být zřetelná ze vztahu ???. Tato násobnost je dána rozdílem stupně čitatele a jmenovatele racionálně lomenné funkce  $\varphi(p)$ . Nyní zavedeme novou funkci  $\phi(p)$  danou vztahem<sup>2</sup>

$$\phi(p) = \varphi(p)\varphi(-p)$$

tedy

$$G(p)G(-p) = \frac{1}{H(p)H(-p)} = 1 + \phi(p) \quad (3.3)$$

a dále definujeme proměnnou  $y$  touto substitucí

$$y = -p^2$$

Potom můžeme psát nový tvar charakteristické funkce

$$\phi(y) = C_y \cdot y^{-m_0} \cdot \prod_{i=1}^n (y - y_i)^{-2m_i} \quad (3.4)$$

kde  $C_y = C_k^2$  a  $y_i = \omega_i^2$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Pro reálné frekvence je  $y$  číslo reálné kladné. S rostoucím kmitočtem  $\omega$  roste také hodnota  $y$ .

### 3.1.2 Transformace proměnných $y \rightarrow x$

Kvůli usnadnění dalších matematických postupů je vhodné již definované vztahy transformovat.

Definujme novou veličinu  $x$

$$x = t_3 \cdot \frac{y - t_2}{y - t_1} \quad (3.5)$$

---

<sup>2</sup>Tato funkce je v zahraniční literatuře značena  $k(p)$ , tedy platí  $k(p) = K(p)K(-p)$

Dolní propust	$t_3 = 1, t_1 = 0, t_2 \equiv \text{mez propustného pásma}$
Horní propust	$t_3 = -1, t_1 = 0, t_2 \equiv \text{mez propustného pásma}$
Pásmová propust	$t_3 = 1, t_1 \equiv \text{horní mez PP}, t_2 \equiv \text{dolní mez PP}$
Pásmová zadrž	$t_3 = -1, t_1 \equiv \text{horní mez PP}, t_2 \equiv \text{dolní mez PP}$

Tabulka 3.1: Přehled transformací  $y \rightarrow x$

Dolní propust, horní propust	Pásmová propust, pásmová zadrž
$w = n + 1$	$w = n + 2$
$x_{n+1} = t_3$	$x_{n+1} = t_3$
$m'_{n+1} = m_\infty$	$m'_{n+1} = m_\infty$
	$x_{n+2} = \frac{t_2 t_3}{t_1}$
	$m'_{n+2} = m_0$

Tabulka 3.2: Hodnoty  $w, x_i$  a  $m'_i$  pro všechny typy filtrů

Parametry  $t_1, t_2$  a  $t_3$  jsou definovány v tabulce ???. Parametry  $t_1$  a  $t_2$  odpovídají okrajům propustného pásma. Tato transformace přesune propustná pásma na zápornou poloosu  $x$  a nepropustná pásma na poloosu kladnou. Grafické znázornění této transformace pro všechny typy filtrů je na obr.??.

Tento postup vlastně transformuje všechny typy tolerančních schémat na typ jeden, což velmi zjednodušuje postup optimalizace.

Předpokládejme, že se útlumová nula ani pól nenachází na okrajích propustných pásem. Potom můžeme transformovat rovnici ?? a po algebraických úpravách dostaneme tvar

$$\phi(x) = C_x \cdot \prod_{i=1}^w (x - x_i)^{-m'_i} \quad (3.6)$$

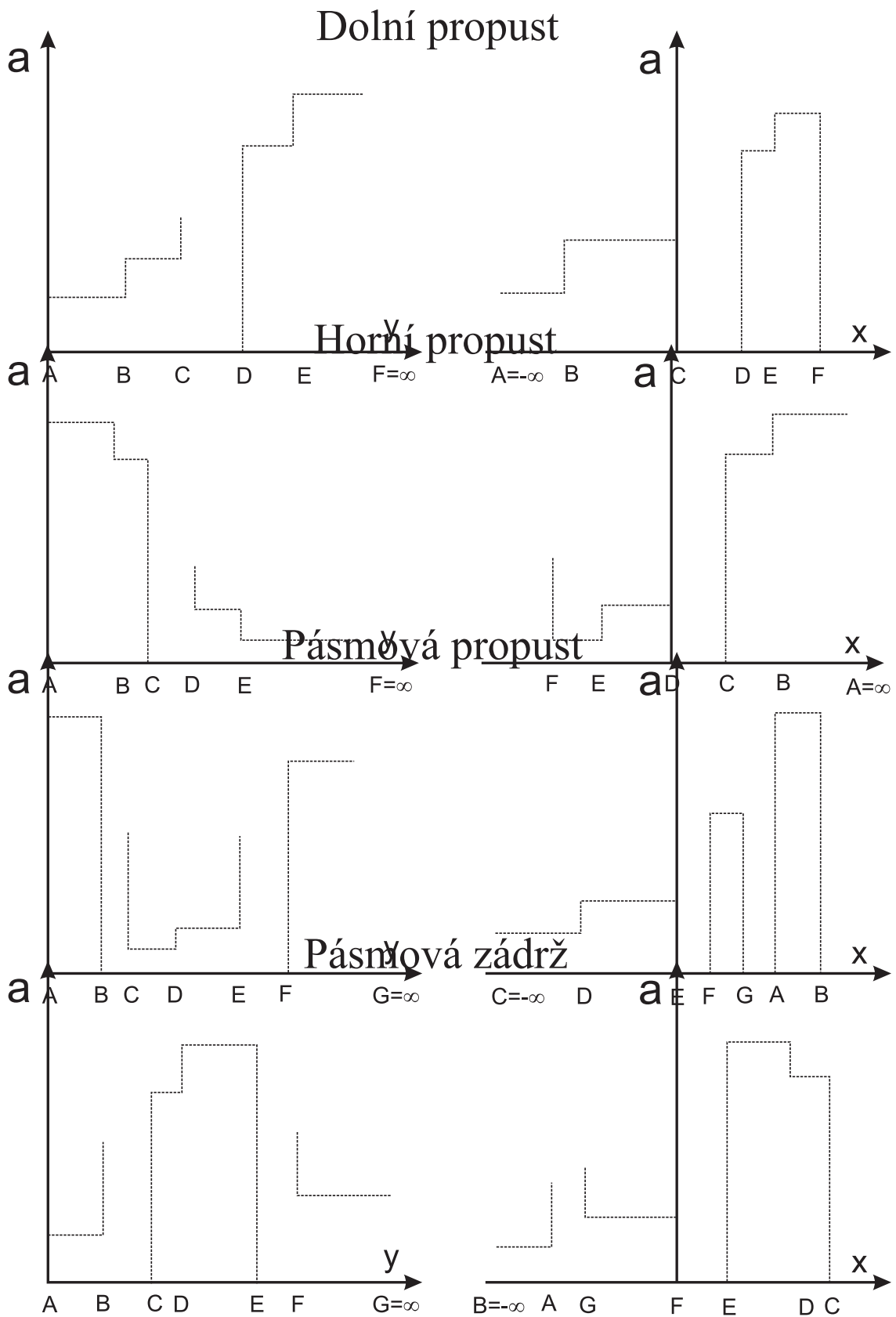
$$x_i = t_3 \cdot \frac{y_i - t_2}{y_i - t_1}, \quad m'_i = 2m_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$x_i \neq 0, \quad i = 1, \dots, w$$

kde hodnoty  $w, x_i$  a  $m'_i$  ( $i > n$ ) jsou dány tabulkou ??.

Funkce  $\phi(x)$  nemá singularitu v nekonečnu v případě pásmové propusti a zadrž, zatímco v případě dolní a horní propusti má v nekonečnu singularitu s násobností  $m_\infty$ .





Obrázek 3.1: Transformace  $y \rightarrow x$

### 3.1.3 Funkce $b(x)$

Pro snadnější matematický postup definujeme novou funkci  $b(x)$  takto

$$b(x) = \ln \phi(x) \quad (3.7)$$

Pro reálné frekvence je  $\phi(x)$  mocninná funkce a musí být nezáporná. Z toho vyplývá, že  $b(x)$  je reálná funkce proměnné  $x$ . Funkci  $b(x)$  můžeme vyjádřit jako součet členů řady, kde každý člen vyjadřuje útlumovou nulu nebo pól<sup>3</sup>.

$$b(x) = C_b - \sum_{i=1}^w m'_i \cdot \ln |x - x_i| \quad (3.8)$$

$$C_b = \ln |C_x|$$

Funkce  $b(x)$  je zavedena kvůli optimalizačnímu algoritmu, neboť převádí racionálně lomenou funkci na řadu, což je výhodné pro další matematické operace. Nechť  $b_s(x)$  je transformovaná funkce  $a_s(x)$  podle následujícího vztahu

$$b_s(x) = \ln \left( 10^{\frac{a_s(x)}{10}} - 1 \right) \quad (3.9)$$

Převádíme hodnotu provozního útlumu danou tolerančním schématem, která je v decibelech.

Potom se specifikace filtru, tak jak byla uvedena na začátku této kapitoly, změní následovně

$$\begin{aligned} b(x) &\geq b_s(x) && \dots \text{ v nepropustných pásmech} \\ b(x) &\leq b_s(x) && \dots \text{ v propustných pásmech} \end{aligned}$$

### 3.1.4 Optimalizační procedura

Definujeme pro propustné i nepropustné pásmo vážené minimální rezervy

$$M_{BP} \quad \text{minimum funkce} \quad \frac{b_s(x) - b(x)}{W_{BP}} \quad \text{v propustném pásmu}$$

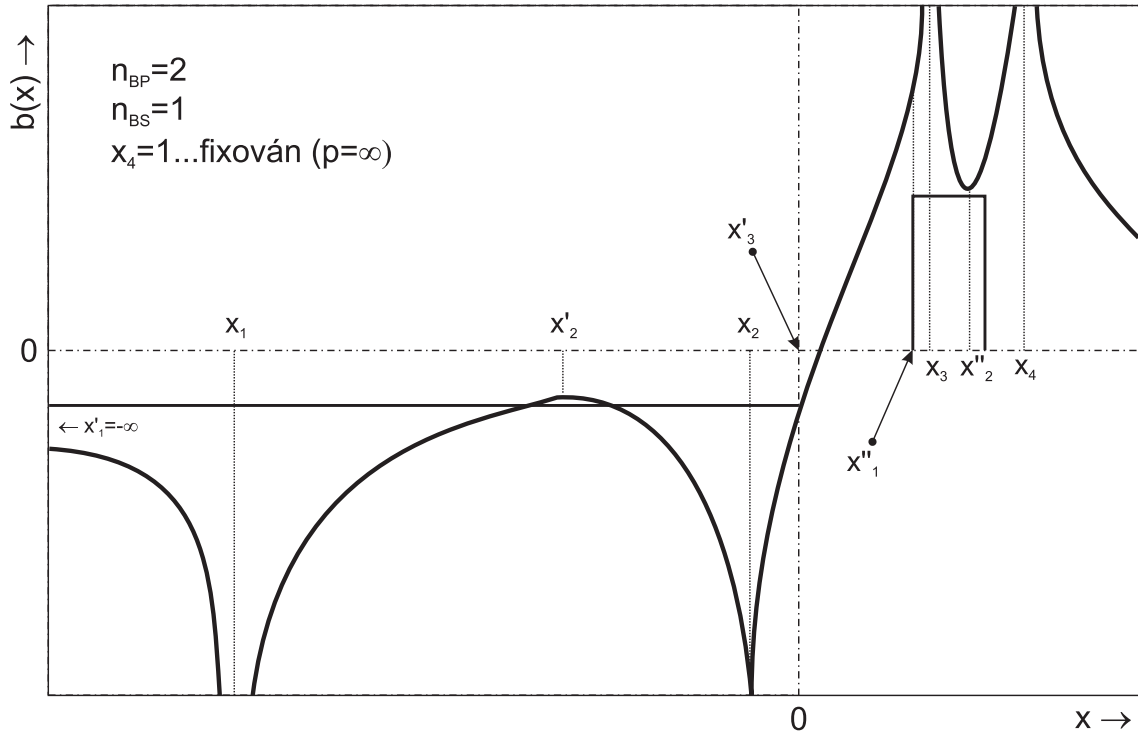
$$M_{BS} \quad \text{minimum funkce} \quad \frac{b(x) - b_s(x)}{W_{BS}} \quad \text{v nepropustném pásmu}$$

kde  $W_{BP}$  a  $W_{BS}$  jsou dvě kladné konstanty. Některé útlumové nuly a póly  $x_i$  můžeme po ose  $x$  posouvat a optimalizovat jejich polohu, jiné fixovat na stálých pozicích ( $p = 0, \infty$  a dále na jiných kmitočtech).

Podle Čebyševa je průběh optimální právě když hodnota  $D = \min(M_{BP}, M_{BS})$  dosahuje maxima. To znamená, že se iteračním postupem, kdy měníme polohu nul a pólů  $x_i$  na ose  $x$ , snažíme najít maximum funkce  $D$ .

---

<sup>3</sup>Trasformací  $\phi(x) \rightarrow b(x)$  se nuly a póly funkce  $\phi(x)$  fakticky změní na póly  $b(x)$ . V následujícím textu budeme ale i nadále označovat singularity funkce  $b(x)$  jako útlumové nuly a póly.



Obrázek 3.2: Iterační proces

Nyní definujme elementární oblouk jako úsek křivky  $b(x)$  mezi dvěma přílehlými pohyblivými nulami nebo póly, nebo jako úsek mezi jednou pohyblivou nulou nebo pólem a okrajem pásma. Nula nebo pól umístěný v bodě se stabilní fixovanou frekvencí, určenou vstupními požadavky, nemá vliv na vytvoření elementárních oblouků. Jestliže předchozím postupem získáme  $n_{BP}$  útlumových nul a  $n_{BS}$  útlumových pólů, pak dostaneme  $n_{BP} + 1$  resp.  $n_{BS} + 1$  elementárních oblouků v propustném resp. nepropustném pásmu. Nuly a póly jsou vypočítávány v tomto pořadí :

- Útlumové pohyblivé nuly  $n_{bp}$
- Útlumové pohyblivé póly  $n_{bs}$

Optimalizační podmínku můžeme definovat takto. Přenosová funkce je optimalizovaná právě tehdy, jestliže vážené minimální rezervy  $M_{BP}$  a  $M_{BS}$  jsou si rovny pod nebo nad každým elementárním obloukem.

Optimalizační proces vycházející z Remesova algoritmu, můžeme shrnout do následujících kroků :

1. Nastavení iteračního kroku  $ni$  na hodnotu  $ni = 1$ . Přednastavení nul a pólů  $x_i^{(1)}$ , ( $i = 1, \dots, q$ ), kde  $q = n_{BP} + n_{BS}$ , na určité frekvence (počáteční odhad uživatele).

2. Nalezení frekvencí maxim elementárních oblouků na levé poloose  $x$  (útlumové nuly)  $x_j^{(ni)}$ , ( $j = 1, \dots, n_{BP} + 1$ ). Nalezení frekvencí minim elementárních oblouků na pravé poloose  $x$  (útlumové póly)  $x_j^{(ni)}$ , ( $j = 1, \dots, n_{BS} + 1$ ). Značení je dobře patrné z obrázku ??.
3. Nalezení nové polohy útlumových nul a pólů  $x_i^{(ni+1)}$ , ( $i = 1, \dots, q$ ) takto :

$$b^{(ni+1)}(x_j^{(ni)}) = b_s(x_j^{(ni)}) - W_{BP} \cdot D, \quad (j = 1, \dots, n_{BP} + 1) \quad (3.10)$$

$$b^{(ni+1)}(x_j^{(ni)}) = b_s(x_j^{(ni)}) + W_{BS} \cdot D, \quad (j = 1, \dots, n_{BS} + 1) \quad (3.11)$$

kde  $b^{(ni+1)}$  značí funkci  $b$  korespondující s novou polohou singularit  $x_i^{(ni+1)}$ . Takto je vytvořena soustava  $q + 2$  nelineárních rovnic s  $q + 2$  neznámými ( $q \dots$  celkový počet singularit, konstanty  $C_b$  a  $D$ ). Tento systém rovnic je nejprve linearizován v okolí předcházejícího umístění singularit  $x_i^{(ni)}$ . Linearizovaná soustava rovnic je následně řešena Gaussovou eliminační metodou.

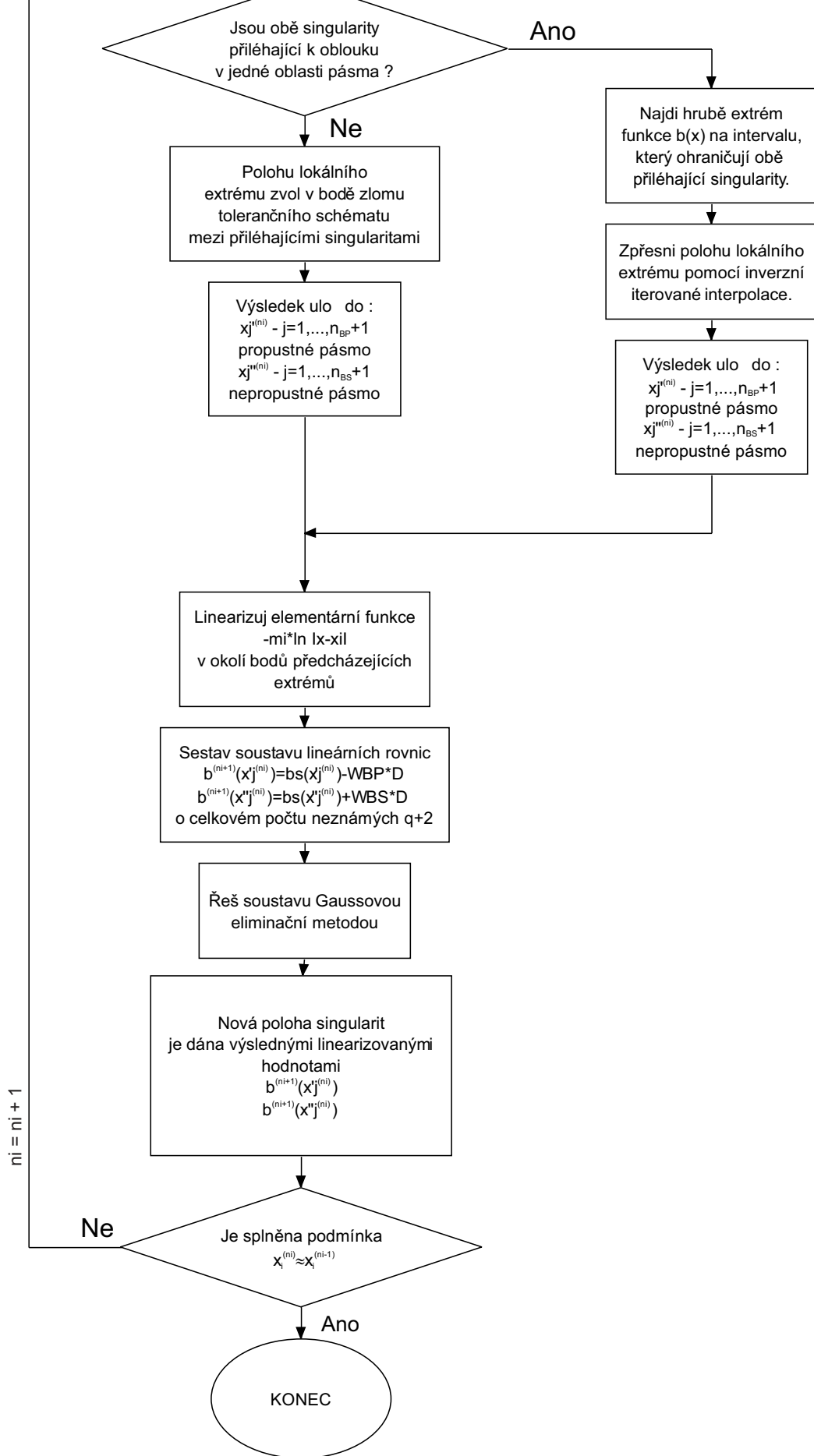
4. Zvýšení iteračního kroku  $ni = ni + 1$ , návrat do bodu 2, pokud není splněna podmínka  $x_i^{(ni)} \approx x_i^{(ni-1)}$ . V případě pásmové propusti lze útlumové póly snadno přesunout z jednoho nepropustného pásma do jiného<sup>4</sup>. Toto je důležitá výhoda, vyplývající ze zavedení veličiny  $x$ .

### 3.1.5 Určení přenosové funkce

Výše uvedeným postupem byla vypočtena nová poloha singularit funkce  $b(x)$ . Transformací  $x \rightarrow y \rightarrow \omega$  získáme kmitočty nul a pólů optimalizované charakteristické funkce  $\varphi(p)$ . Nyní zbývá určit z charakteristické funkce  $\varphi(p)$  přenosovou funkci filtru  $G(p)$ . Podrobný popis tohoto postupu je uveden v kapitole, která se zabývá matematickým popisem filtru.

---

<sup>4</sup>Zcela analogicky lze přesouvat útlumové nuly mezi propustnými pásmy v případě pásmové zádrže.



Obrázek 3.3: Vývojový diagram optimalizačního algoritmu

## 3.2 Použité numerické metody

Při řešení tak rozsáhlé úlohy, jakým výše uvedený optimalizační proces bezesporu je, ovlivňuje úspěšnost řešení také použití numerických metod. Při implementaci optimalizačního algoritmu vyvstává celá řada numerických problémů.

Pro souhrnný popis výše uvedeného optimalizačního algoritmu je nutné se zmínit o numerických metodách, které jsou potřebné pro jakoukoli implementaci tohoto algoritmu.

### 3.2.1 Extrémy funkce $b(x)$

Prvním problémem při řešení je nalezení lokálních extrémů funkce  $b(x)$ . Uvedme znovu její tvar

$$b(x) = C_b - \sum_{i=1}^w m'_i \ln |x - x_i| \quad (3.12)$$

kde  $C_b$ ,  $m'_i$  a  $x_i$  jsou konstanty.

Při hledání extrémů funkce  $b(x)$  vlastně řešíme rovnici  $b'(x) = 0$ . Derivace funkce  $b(x)$  podle proměnné  $x$  má tvar

$$b'(x) = - \sum_{i=1}^w m'_i \cdot \frac{\text{signum}(x - x_i)}{|x - x_i|}$$

Rovnice  $b'(x) = 0$  je téměř neřešitelná, pokud chceme přesné řešení. Jako nejvhodnější cesta pro zjištění kořenů této rovnice se jeví tento postup operací

- Rozdělení intervalu, na kterém hledáme lokální extrém, na určitý počet dílků. Nalezení lokálního extrému dosazováním do vztahu pro funkci  $b(x)$  v tomto rozdělení. Takto získáme hrubý odhad umístění lokálního extrému funkce  $b(x)$ .
- Zpřesnění nalezeného kořenu rovnice  $b'(x) = 0$  některou numerickou metodou.

Nejčastěji používané metody pro zpřesnění kořenu nelineární rovnice jsou metody *Regula falsi* a *Newtonova iterační metoda*. Tyto metody jsou podrobně popsány v [?], [?] nebo [?].

Obě metody jsou vlastně rekurentní formule, které postupně konvergují ke kořeni rovnice  $f(x) = 0$ , pokud je prvotní odhad dostatečně blízký tomuto kořeni.

Rekurentní formule Newtonovy metody má tvar

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Vztah pro zpřesnění kořene metodou *Regula falsi* je

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1}f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Při použití Newtonovy metody nastává tento problém. Pokud se prvotní odhad kořene nelineární rovnice dostane do těsné blízkosti kořene rovnice, pak je hodnota ve jmenovateli Newtonovy formule velmi malá a může dojít k aritmetické chybě dělení nulou. Tato situace nenastane v praxi často, ale i tak může způsobit řadu nepříjemných problémů.

Metoda Regula falsi je v praxi velmi často používanou metodou zpřesnění kořenů nelineárních rovnic. Je to metoda, která vždy konverguje, ale zpravidla velmi pomalu.

Z uvedeného vyplývá, že ani jedna z těchto metod není vhodná pro použití v našem případě. Po důkladném prostudování různých metod, jsem se rozhodl použít metodu *inverzní iterované interpolace*. Tato metoda vychází z Lagrangeovy interpolace, která je uvedena např. v [?], [?] nebo [?].

Protože není tato metoda tak často používána a některé její vlastnosti je možné přímo v programu *NAPFIL* měnit, rozhodl jsem se pro její popis.

## Iterovaná interpolace

Iterovaná interpolace vychází z použití diferenčních interpolačních vzorců na Lagrangeovu iterpolaci. Naším cílem je překonat nevýhodu Lagrangeovy interpolace, která spočívá v nutnosti přepočtu koeficientů při přechodu od  $n$  k  $n + 1$  bodům. Učiníme to pomocí *iterované interpolace*, v níž se vytváří posloupnost interpolantů Lagrangeova typu, aniž je třeba podstatně přepočítat předcházející koeficienty.

Označme  $y_{n1}, \dots, y_{nk}(x)$  Lagrangeův interpolační vzorec, který užívá bodů  $a_{n1}, \dots, a_{nk}$ , o nichž nepožadujeme, aby byly ekvidistantní. Pak můžeme napsat

$$y_{1,2,\dots,n}(x) = \frac{1}{a_n - a_{n-1}} \begin{vmatrix} y_{1,2,\dots,n-1}(x) & a_{n-1} - x \\ y_{1,2,\dots,n-2,n}(x) & a_n - x \end{vmatrix} \quad (3.13)$$

Tuto rovnici lze verifikovat tak, že si všimneme, že pravá strana, což je polynom stupně  $n - 1$ , nabývá hodnot  $f(a_i)$  v bodech  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Rovnice ?? pak ukazuje, jak lze Lagrangeův vzorec řádu  $n$  vytvořit pomocí vzorců nižšího řádu. Pomocí následující tabulky můžeme zobecnit výsledek ?? takto

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & a_1 - x & y_1(x) & & & \\ a_2 & a_2 - x & y_2(x) & y_{1,2}(x) & & \\ a_3 & a_3 - x & y_3(x) & y_{1,3}(x) & y_{1,2,3}(x) & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ a_n & a_n - x & y_n(x) & y_{1,n}(x) & y_{1,2,n}(x) & y_{1,2,3,\dots,n}(x) \end{array} \quad (3.14)$$

Prvky v každém sloupci tabulky můžeme dostat pomocí prvků v předcházejícím sloupci analogicky jako v ???. Uvedme příklad

$$y_{1,2,n}(x) = \frac{1}{a_n - a_2} \begin{vmatrix} y_{1,2}(x) & a_2 - x \\ y_{1,n}(x) & a_n - x \end{vmatrix} \quad (3.15)$$

Prvky na diagonále v (??) jsou pak právě to co hledáme. Tvoří totiž posloupnost Lagrangeových interpolantů, z nichž každý zahrnuje o jeden tabulkový bod více než předchozí. A protože každý prvek v (??) se počítá pomocí vzorce analogického s (??), lze proces snadno zmechanizovat.

### Inverzní interpolace

Při hledání extrémů libovolné funkce narazíme na problém řešení obecné nelineární rovnice  $f(x) = 0$ . Jedním ze základních a velmi efektivních nástrojů při řešení této rovnice je inverzní interpolace. Řešení rovnice  $f(x) = 0$  je příkladem běžného numerického problému nalezení kořenu funkce. Inverzní interpolace nám dává snadný a účinný způsob pro hledání kořenů funkcí.

Budiž  $y = f(x)$  funkce, jejíž kořen chceme najít a předpokládejme, že je tabelována v řadě bodů, které nemusejí být ekvidistantní, takže máme

$$\begin{array}{l} x : \quad x_1 \quad \quad x_2 \dots x_n \\ y = f(x) : \quad f(x_1) \quad f(x_2) \dots f(x_n) \end{array} \quad (3.16)$$

Předpokládejme, že  $f(x)$  splňuje v intervalu  $\langle x_1; x_n \rangle$  předpoklady inverzní funkce, takže můžeme psát  $x = g(y)$ , kde  $g$  je funkce inverzní k  $f$ . Nalezení hodnoty  $g(0)$  je proto ekvivalentní s nalezením kořenu funkce  $f(x)$ . Abychom hodnotu  $g(0)$  přibližně určili, napíšeme nejdříve tabulku (??) ve tvaru

$$\begin{array}{l} y : \quad f(x_1) \quad f(x_2) \dots f(x_n) \\ x = g(y) : \quad x_1 \quad \quad x_2 \dots x_n \end{array} \quad (3.17)$$

Nyní protože jde o interpolaci, nechť  $f(x_1), \dots, f(x_n)$  jsou tabulkové body nezávisle proměnné  $y$  a nechť  $x_1, \dots, x_n$  jsou funkční hodnoty v těchto bodech. Užijeme-li tedy Lagrangeova interpolačního vzorce (iterované interpolace) pro aproximaci funkce  $g(y)$  polynomem, a pak interpolujeme v bodě  $y = 0$ , dostaneme žádanou aproximaci hodnoty  $\alpha = g(0)$ .

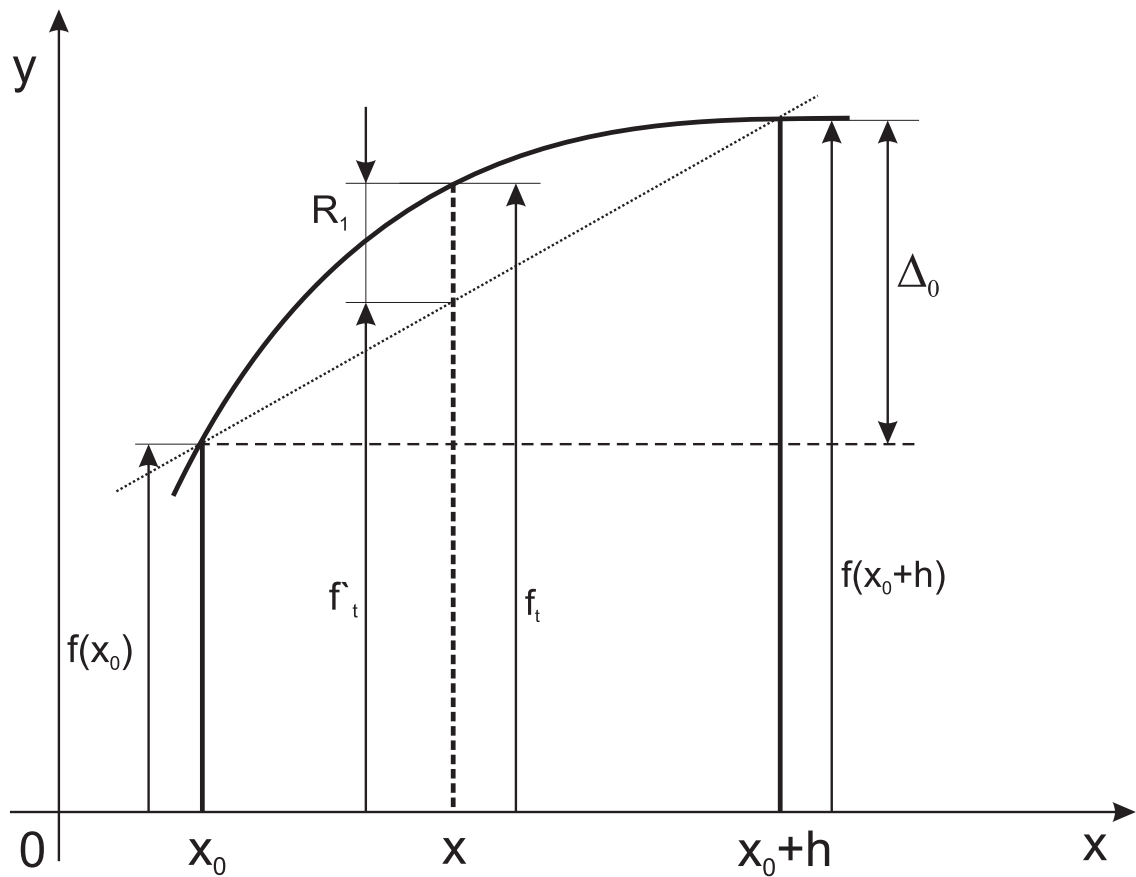
### 3.2.2 Lineární interpolace

Dalším problémem při algoritmizaci optimalizačního procesu je linearizace funkce  $b(x)$ . Funkce  $b(x)$  je součtem dílčích členů ve tvaru

$$f(x) = m'_i \cdot \ln |x - x_i|$$

kde  $m'_i$  je konstanta. V tomto případě je také  $x$  konstantní hodnotou, neboť linearizujeme výše uvedenou funkci  $f(x)$  v okolí minulého umístění singularit (viz popis optimalizačního procesu, bod 3).





Obrázek 3.4: Lineární interpolace

Lineární interpolací nahrazujeme vlastně funkci  $f(x)$  lineární funkcí ve tvaru  $g(x) = ax + b$ .

Interpolačním vzorcem pro lineární interpolaci rozumíme vzorec, obsahující interpolační polynom prvního stupně, tedy

$$f(x_0 + th) = f_0 + t\Delta_0 + R_1 \quad (3.18)$$

$$\Delta_0 = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

kde

$$|R_1| \leq \frac{|t(t-1)|}{2} h^2 \max |f''(\xi)|$$

$$\xi \in (x_0, x_0 + h)$$

Zbytek se zpravidla odhaduje podle následující nerovnosti

$$|R_1| \leq \frac{h^2}{8} \max |f''(\xi)| \quad (3.19)$$

Při geometrické interpretaci se jeví lineární interpolace jako nahrazení grafu funkce  $f(x)$  přímkou procházející body  $[x_0, f(x_0)]$ ,  $[x_0 + h, f(x_0 + h)]$  viz obr. ???. Získáme vlastně hodnotu  $f'_t$  místo  $f_t$ . Tato hodnota se liší od správné o chybu  $R_1$ .

### 3.2.3 Řešení soustavy lineárních rovnic

Dalším krokem při výpočtu optimalizované přenosové funkce uvedeným algoritmem je řešení soustavy lineárních rovnic (třetí bod optimalizačního postupu).

Nová poloha singularit funkce  $b(x)$  a konstanty  $C_b$  a  $D$  jsou řešením soustavy  $n$  lineárních rovnic o  $n$  neznámých ve tvaru

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = c_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = c_2$$

.....

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = c_n$$

Tato soustava je řešena *Gaussovou eliminační metodou*. Tato metoda je velmi efektivní, a proto je velmi často používaná v různých výpočetních programech. Vzhledem k tomu, že je tato metoda obecně známa a hojně publikována, nebudeme se jí dále zabývat. Podrobný popis najde čtenář např. v [?], [?], [?] nebo [?].

### 3.2.4 Výpočet kořenů polynomu

Posledním úskalím při výpočtu přenosové funkce je určení funkce  $G(p)$  z charakteristické funkce  $\varphi(p)$ , která je výsledkem optimalizačního algoritmu. V kapitole 1 je popsán postup výpočtu  $G(p)$  z  $\varphi(p)$ .

Určení nulových bodů přenosové funkce  $G(p)$  je dáno řešením rovnice

$$v(p)v(-p) = 0 \tag{3.20}$$

kde funkce  $v(p)v(-p)$  má tvar

$$v(p)v(-p) = p^n + a_{n-2}p^{n-2} + \dots + a_2p^2 + a_0$$

kde koeficienty  $a_i$  jsou reálná čísla a  $n$  je vždy sudé číslo. Jedná se tedy o sudý polynom.

Metod určených k hledání kořenů takovéto funkce lze v literatuře najít celou řadu. Z kapitoly, která se zabývala matematickým popisem selektivních soustav víme, že výsledkem rovnice  $v(p)v(-p) = 0$  bude soustava komplexních kořenů. V tomto případě nemáme apriorní informace o přibližné poloze kořenů. Musíme tedy použít metodu, která vždy konverguje, zvláště pro polynomy vysokých stupňů.

K řešení naší rovnice  $v(p)v(-p) = 0$  můžeme použít následujících metod : *Lehmerovu, Graffeovu, Bernoulliovu nebo Laguerrovu metodu*. Podrobný popis těchto metod, včetně jejich vlastností najde čtenář v [?], některé z těchto metod jsou také popsány v [?], [?] a [?].

Všechny čtyři uvedené metody jsou vždy konvergentní, u některých mohou vzniknout dílčí obtíže, které však mohou být překonány dobrou algoritmizací a obezřetným programováním.

K řešení rovnice  $v(p)v(-p) = 0$  byla vybrána metoda Laguerrova také z těchto důvodů

- Laguerrova metoda je vždy konvergentní nezávisle na počáteční aproximaci.
- Je to velmi efektivní a rychle konvergující metoda.

V programu *NAPFIL* byla použita hotová rutina Laguerrovy metody z knihovny *NRPAS–Numeric Recipes Pascal*<sup>5</sup>. Detailně je Laguerrova metoda popsána v [?] a [?].

---

<sup>5</sup>Tato knihovna procedur byla vytvořena jako dodatek k publikaci *Numerical recipes in Pascal : The art of scientific computing*.

# Kapitola 4

## Program NAPFIL

### 4.1 Popis a struktura programu

Program NAPFIL umožňuje realizovat kompletní návrh přenosové funkce z ne-standardních požadavků na toleranční schéma filtru.

Je koncipován jako jednotný celek, který v sobě integruje řadu dílčích pod-programů realizujících jednotlivé kroky návrhu.

Program je napsán v jazyce *Turbo Pascal 6.0* firmy *Borland*. Program běží v reálném módu procesoru pod operačním systémem MS-DOS verze 3.30 a vyšší firmy *MICROSOFT*. Jako uživatelské rozhraní je použito prostředí *MVK* autora Miroslava Mžíka. Toto prostředí je uživatelsky dostatečně příjemné, a také ovládání lze považovat za standardní, neboť vychází z klasického prostředí *Turbo Vision*.

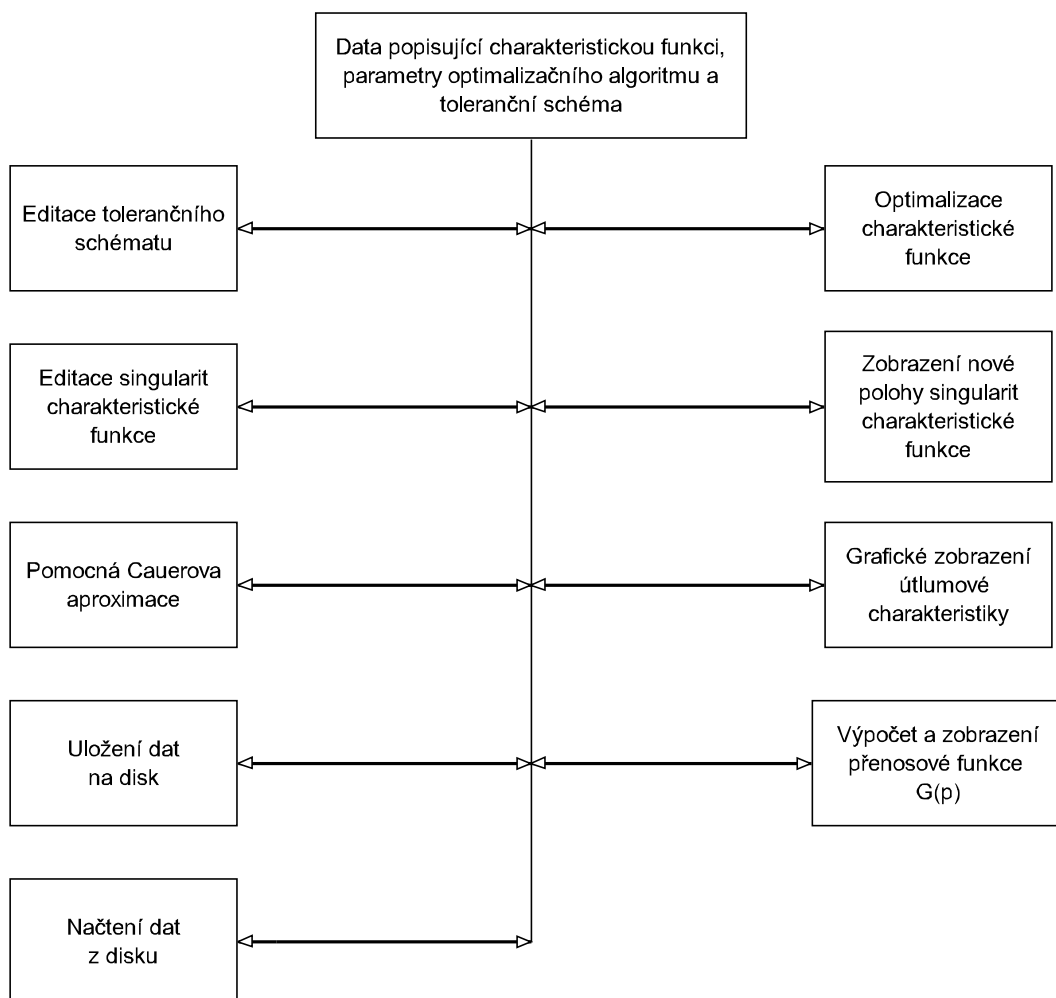
#### 4.1.1 Bloková struktura programu

Vzhledem k velké rozsáhlosti byl program rozdělen na řadu samostatných bloků. Tyto bloky jsou koncipovány jako samostatné jednotky procedur a funkcí (units). Z toho vyplývá možnost použití těchto jednotek i v jiných programech. Základní bloková struktura programu *NAPFIL* je znázorněna na obr. ??.

Jednotlivé bloky vykonávají tyto funkce :

#### **Editace tolerančního schématu**

Tento blok umožňuje zadat „schodovité“ toleranční schéma filtru. V případě, že již bylo toleranční schéma zadáno, umožňuje editaci stávajícího stavu.



Obrázek 4.1: Bloková struktura programu *NAPFIL*

## **Editace singularit charakteristické funkce**

V tomto bloku jsou obsaženy procedury, které editují počáteční nastavení nul a pólů charakteristické funkce zadaného filtru. Program umožňuje nejen přednastavení frekvencí singularit, ale můžeme také zadávat násobnost a další vstupní údaje pro optimalizační algoritmus<sup>1</sup>.

## **Pomocná Caurova aproximace**

Vzhledem k nutnosti poměrně přesného počátečního odhadu rozmístění nul a pólů charakteristické funkce před spuštěním optimalizačního algoritmu, je do programu *NAPFIL* zařazena Caurova aproximace. Blok obsahuje také zadání standardního tolerančního schématu filtru. Na toto toleranční schéma je aplikována Caurova aproximace, jejíž výsledky jsou v programu dále zpracovávány.

## **Uložení dat na disk**

Do definovaného souboru ukládá hodnoty tolerančního schématu, údaje o počátečním nastavení nul a pólů charakteristické funkce a parametry optimalizačního algoritmu.

## **Načtení dat z disku**

Z definovaného souboru načte hodnoty tolerančního schématu, údaje o počátečním nastavení nul a pólů charakteristické funkce a parametry optimalizačního algoritmu.

## **Optimalizace charakteristické funkce**

Tento blok implementuje optimalizační proceduru popsanou v kapitole 3. Umožňuje navrhnout dolní, horní a pásmové propusti se stupňovitými požadavky na útlum v propustném i nepropustném pásmu. Algoritmus optimalizuje rozmístění nul a pólů charakteristické funkce.

Vlastní jednotka je rozdělena na několik částí např. linearizace, numerické výpočty atd.

## **Zobrazení nové polohy singularit charakteristické funkce**

Výpis optimalizované charakteristické funkce na obrazovku. Jsou zobrazeny nové polohy nul a pólů charakteristické funkce a násobná konstanta  $C_\varphi$ .

---

<sup>1</sup>Bližší podrobnosti budou uvedeny v kapitole o ovládání programu.

Vstup	Optimalizace	Výstup	Konec
Editace tolerančního schématu Editace singularit Cauerova aproximace Načtení dat z disku Uložení dat na disk	Optimalizace Parametry algoritmu	Výsledky aproximace Grafické výstupy Výpočet přenosové funkce	Konec

Tabulka 4.1: Struktura roletových menu programu *NAPFIL*.

### Grafické zobrazení útlumové charakteristiky

Grafické zobrazení útlumové charakteristiky na obrazovku. Lze vykreslit útlumovou charakteristiku v libovolném frekvenčním intervalu.

### Výpočet a zobrazení přenosové funkce $G(p)$

Tento blok vypočítá normovanou přenosovou funkci  $G(p)$  z charakteristické funkce  $\varphi(p)$ . Nuly a póly přenosové funkce jsou následně zobrazeny.

## 4.2 Práce s programem

### 4.2.1 Uživatelské rozhraní

Jak již bylo uvedeno, program používá uživatelské prostředí *MVK*. Prostředí *MVK* je jakousi nadstavbou systému *Turbo Vision*.

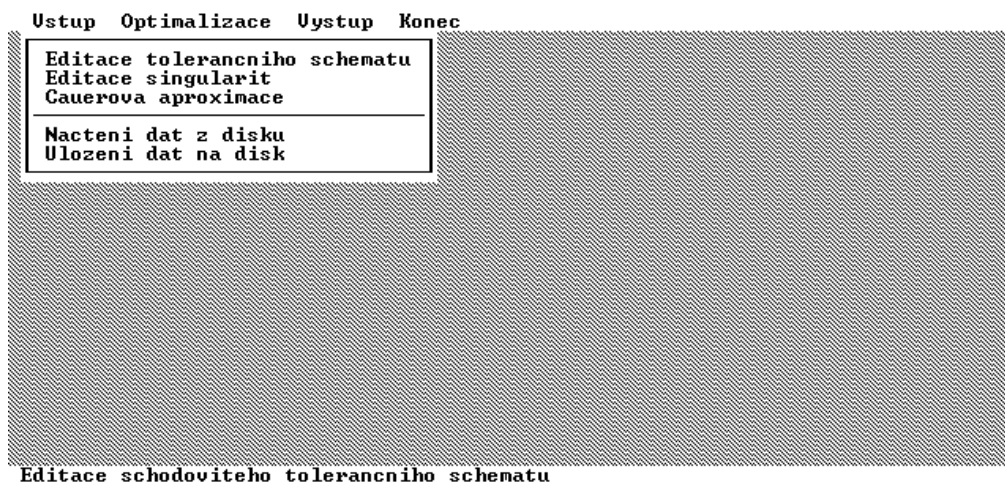
Program je možné ovládat jak klávesnicí, tak myší, případně oba způsoby kombinovat. Jinak se způsob ovládání neliší od jiných standardních programů a není třeba ho podrobně rozebírat.

### 4.2.2 Struktura menu

Po spuštění programu příkazem *NAPFIL.EXE* a po odklepnutí úvodního hlášení nám program nabídne pracovní obrazovku s roletovými menu. Základní struktura je znázorněna na obr. ??.

Na obr. ?? je otevřeno roletové menu *Vstup*. V menu se můžeme pohybovat kurzorovými klávesami, položku vybereme stiskem klávesy ENTER. Ten samý výběr můžeme provést pomocí myši.

Celková struktura menu programu *NAPFIL* je znázorněna v tabulce ??.



Obrázek 4.2: Roletové menu

### 4.2.3 Položky menu

#### Editace tolerančního schématu

Po odklepnutí této položky je uživatel vyzván k zadání typu filtru. Program pracuje s filtry typu *dolní*, *horní* a *pásmovou propust*. Po výběru typu je nutné zadat počet zlomů propustného pásma v případě dolní a pásmové propusti, v případě horní propusti počet zlomů nepropustného pásma.

#### Upozornění !

Počet zlomů propustného (i nepropustného) pásma se zadává v bodech. V případě standardního tolerančního schématu dolní propusti má propustné i nepropustné pásmo vždy jeden bod zlomu.

Poté se zadávají jednotlivé kmitočty bodů zlomu a hodnoty útlumu v těchto bodech.

Zadávaní tolerančního schématu je znázorněno na obr. ??.

Toleranční schéma je nutné zadávat od nižší frekvence k vyšší. Pokud tento postup nebude dodržen, bude na to uživatel upozorněn chybovým hlášením.

**Poznámka** Způsob zadání tolerančního schématu pásmové propusti se lehce odchyluje od výše uvedeného postupu, a proto je nutné ho podrobně vysvětlit.



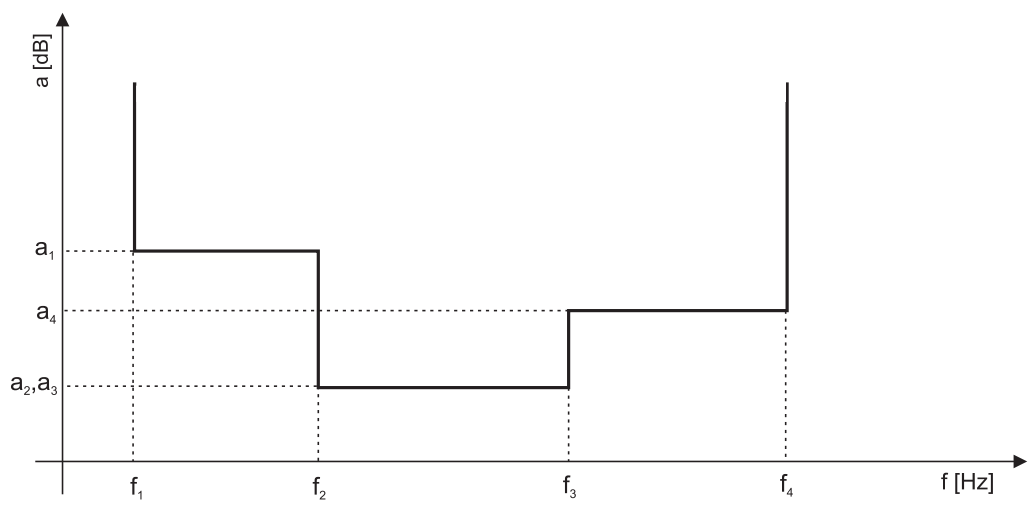
Ustup Optimalizace Uystup Konec

```
Dolni propust - propustne pasmo
Zlom c.1 : 8.000000000E+02 Hz - 1.000000000E-01 dB
Zlom c.2 : 1.000000000E+03 Hz - 1.500000000E-01 dB
```

```
Dolni propust - nepropustne pasmo
Zlom c.1 : 1.100000000E+03 Hz - 7.500000000E+01 dB
Zlom c.2 : 1.200000000E+03 Hz - 8.000000000E+01 dB
Zadej utlum ve zlomu c.3 v [dB] : 7.000000000E+01
```

Zadani schodoviteho tolerancniho schematu dolni propusti

Obrázek 4.3: Zadání tolerančního schématu



Obrázek 4.4: Zadání propustného pásma pásmové propusti

Jak již bylo výše uvedeno, zadává se toleranční schéma vždy v bodech zlomu. To znamená, že v případě standardního schématu, bude počet bodů zlomu 2, což odpovídá levému resp. pravému okraji propustného pásma. Hodnota útlumu bude v obou těchto bodech stejná ! Pokud chceme v propustném pásmu jeden zlom, bude počet bodů zlomu 3. Máme tedy tři body zlomu, zadáme také tři hodnoty útlumu, přičemž dvě hodnoty budou stejné. Tuto skutečnost je nutné si uvědomit. Na obr. ?? je zobrazen příklad propustného pásma pásmové propusti, na kterém je výše uvedený způsob zadání dobře patrný.

Při zadávání útlumových požadavků v nepropustném pásmu postupujeme následujícím způsobem. Nejprve zadáme pravé nepropustné a posléze levé nepropustné pásmo a to vždy zleva doprava. Z uvedeného vyplývá, že první zadaná hodnota odpovídá okraji pravého nepropustného pásma, zatímco poslední hodnota odpovídá okraji levého nepropustného pásma. Je nutné zadávat vstupní hodnoty právě v tomto pořadí !

### **Editace singularit**

Tato část umožňuje editovat vstupní nastavení nul a pólů charakteristické funkce před spuštěním optimalizace. Před editací singularit je nutné zadat toleranční schéma filtru nebo načíst vstupní data ze souboru. Pokud jsme pro počáteční odhad umístění singularit použili interní Caerovy aproximace, budou editované singularity výsledkem této aproximace.

Po odklepnutí položky *Editace singularit* v menu *Vstup* je uživatel vyzván k zadání počtu nul resp. pólů v případě dolní, pásmové propusti resp. horní propusti. Počet druhého typu singularit je automaticky dopočítán.

Okno editace singularit je uvedeno na obr. ??

Situace na obr. ?? popisuje editaci nul a pólů filtru typu dolní propust.

V levém horním okně jsou zobrazeny body zlomů tolerančního schématu kvůli snadné orientaci.

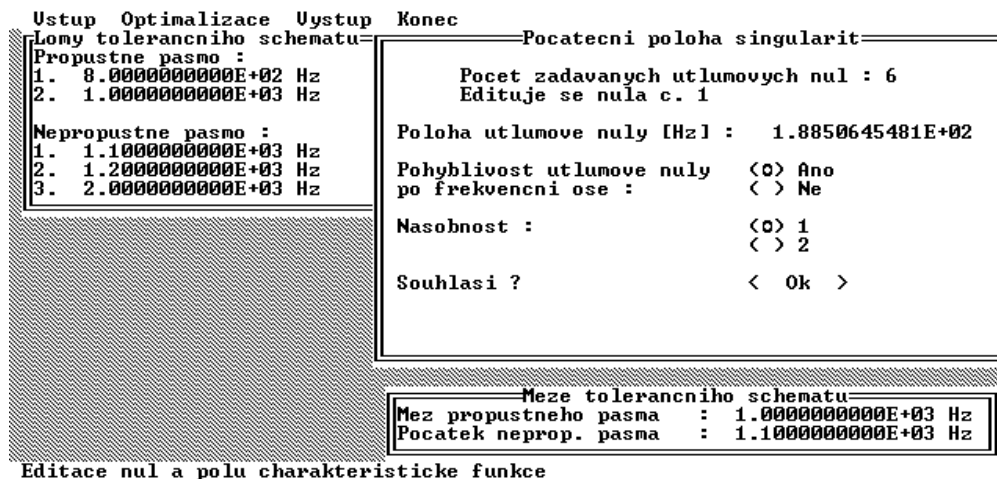
V pravém dolním rohu jsou zobrazeny okraje propustných a nepropustných pásem.

Vlastnosti jednotlivých nul a pólů charakteristické funkce jsou postupně editovány v pravém horním okně.

Uživatel má možnost měnit tyto hodnoty :

- Kmitočet nuly nebo pólu charakteristické funkce v [Hz]
- Pohyblivost singularity po frekvenční ose. V případě, že zatrhneme možnost *Ne*, nebude tato nula nebo pól optimalizován a zůstane na zadaném kmitočtu.
- Počet nul, pólů na daném kmitočtu (násobnost).

Tyto tři parametry jsou postupně editovány pro všechny nuly a póly charakteristické funkce.



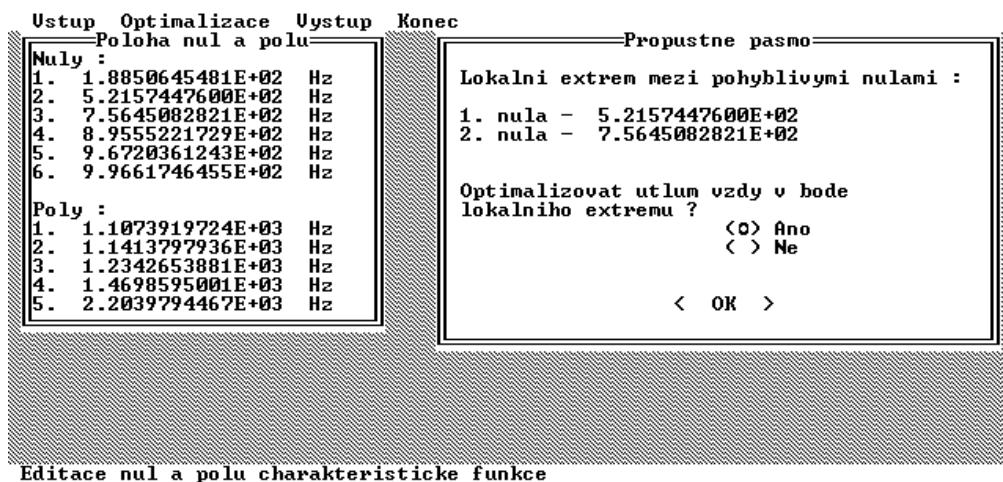
Obrázek 4.5: Editace singularit

V další části je možné zvolit možnost optimalizace charakteristické funkce v určitých bodech průběhu následovně :

- Zachycení průběhu provozního útlumu vždy v bodě lokálního extrému.
- Zachycení průběhu provozního útlumu podle těchto pravidel :
  - Pokud se mezi dvěma přiléhajícími singularitami nenachází zlom tolerančního schématu, bude útlum zachycen v bodě lokálního extrému mezi těmito singularitami.
  - Pokud se mezi přilehlými singularitami nachází zlom tolerančního schématu, bude útlum zachycen v bodě tohoto zlomu.

Editace této volby je ukázána na obr. ???. V levém okně jsou zobrazeny nuly a póly charakteristické funkce, v pravém se je možné zvolit způsob zachycení útlumové charakteristiky pomocí přepínače.

**Poznámka** V případě pásmové propusti je nutné zadat nejprve póly v pravém nepropustném pásmu a potom póly v levém nepropustném pásmu. Pásmová propust má implicitně určený pól v nule, který se nezadává ! Z toho vyplývá, že počet zadávaných pólů v pravém nepropustném pásmu je o 1 větší než v levém nepropustném pásmu. Pokud použijeme interní Caurovu aproximaci, póly budou automaticky správně seřazeny.



Obrázek 4.6: Způsob zachycení útlumové charakteristiky

### Cauerova aproximace

Cauerova aproximace je do programu *NAPFIL* zařazena kvůli počátečnímu odhadu rozložení singularit charakteristické funkce.

Po odklepnutí typu filtru je uživatel vyzván k zadání standardního tolerančního schématu daného filtru.

Na obr. ?? je zobrazeno zadání standardního tolerančního schématu dolní propusti.

Po správném zadání těchto hodnot jsou útlumové požadavky kmitočtově normovány a poté je spuštěna Cauerova aproximace. Výsledkem aproximace je umístění nul a pólů normované dolní propusti. Poté se provede odnormování na žádaný typ filtru a výsledky jsou zobrazeny v okně.

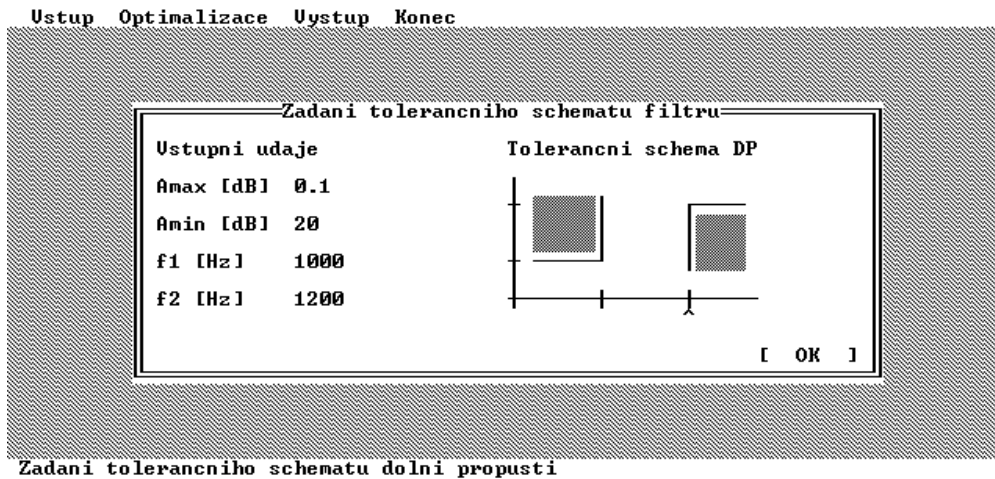
Výstup z Cauerovy aproximace ukazuje obr. ??.

### Optimalizace

Nastavení primárních parametrů a spuštění optimalizačního algoritmu. Příslušné okno je uvedeno na obr. ??.

Uživatel může měnit tyto parametry :

- Počet iterací optimalizačního algoritmu
- Váhové konstanty  $W_{BP}$  a  $W_{BS}$  (viz kapitola 3)



Obrázek 4.7: Zadání standardního tolerančního schématu dolní propusti

## Parametry algoritmu

Uživatel může ovlivňovat některé sekundární parametry optimalizačního algoritmu :

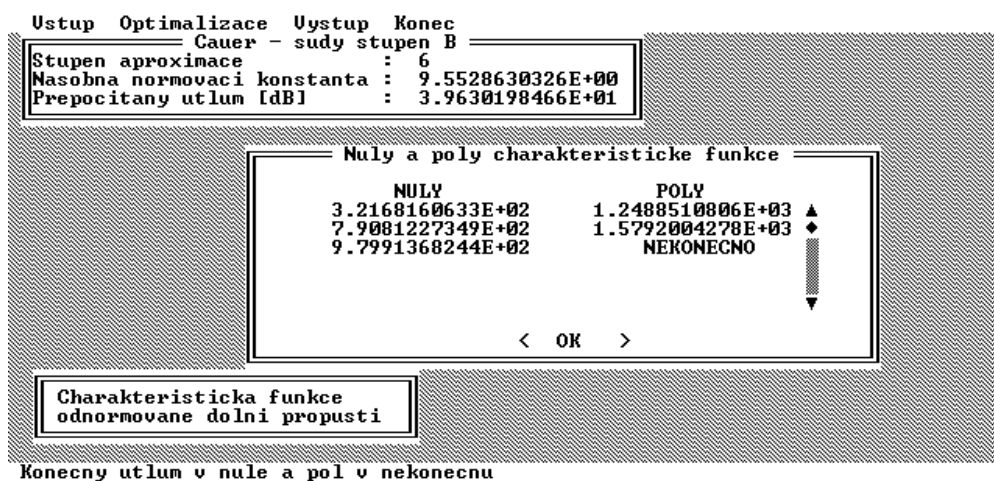
- *Linearizace logaritmu* – relativní vzdálenost dvou bodů, kterými je vedena linearizující přímka.
- *Hrubé hledání extrému funkce  $b(x)$*  – interval, ve kterém se hledá lokální extrém funkce  $b(x)$ , je rozdělen na zadaný počet dílků. Porovnáním hodnot v těchto subintervalech je hrubě nalezen lokální extrém funkce  $b(x)$ .
- *Hodnota reprezentující nekonečno* – hodnota reprezentující numerické nekonečno. Aproximace nekonečna pro numerické výpočty.

**Poznámka** *Výše uvedené volitelné hodnoty ovlivňují přesnost, ale hlavně konvergenci optimalizačního algoritmu. Bez důkladného seznámení s algoritmem nedoporučuji měnit implicitní hodnoty.*

Okno se vstupními sekundárními parametry je na obr. ??.

## Výsledky aproximace

Zobrazí nuly, póly a konstantu  $C_b$  optimalizované charakteristické funkce.



Obrázek 4.8: Výsledky Cauerovy aproximace

Formát výstupních dat je zobrazen na obr. ??.

### Grafické výstupy

Zobrazení optimalizované útlumové charakteristiky daného typu filtru. Lze vykreslit charakteristiku v propustném pásmu, nepropustném pásmu nebo v libovolném intervalu. Program umožňuje zachytit útlumovou charakteristiku na mezi propustného nebo nepropustného pásma, ale také ve volitelném bodě. Tato funkce je vhodná pro lepší optickou kontrolu výsledků optimalizace.

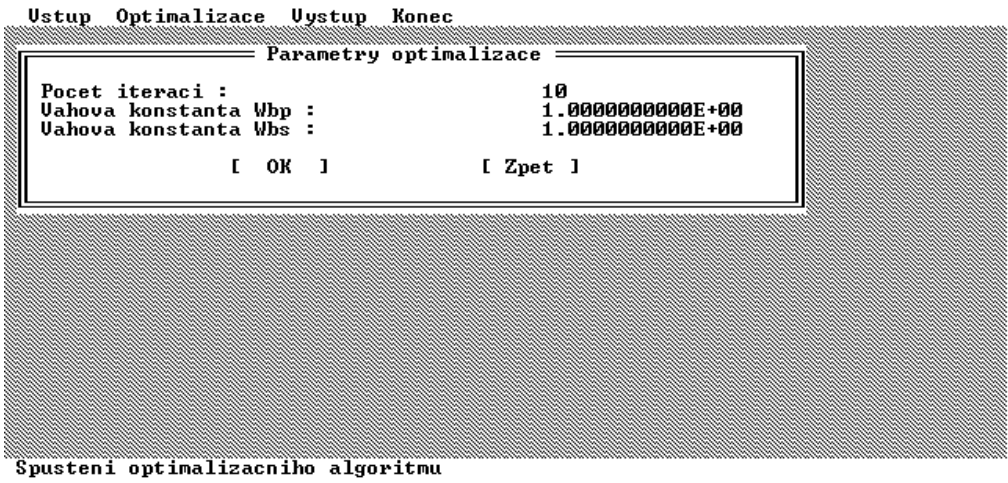
### Výpočet přenosové funkce

Program vypočítá nuly přenosové funkce z funkce charakteristické. Od uživatele je vyžádán jeden bod na útlumové charakteristice, pro který je vypočítána násobná konstanta. Kvůli numerickým výpočtům je přenosová funkce frekvenčně normována.

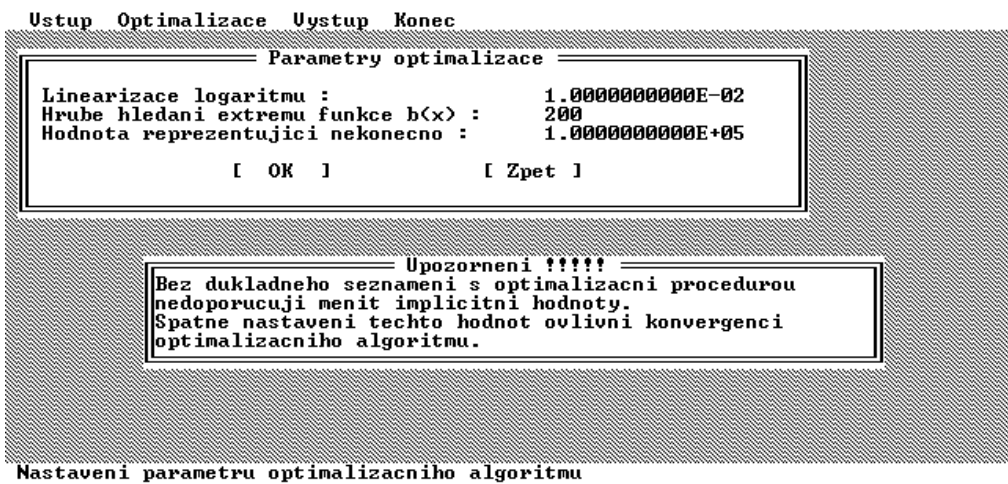
Formát výstupu je zobrazen na obr. ??.

### Konec

Ukončení běhu programu, návrat do operačního systému *MS-DOS*.



Obrázek 4.9: Spuštění optimalizačního algoritmu



Obrázek 4.10: Parametry optimalizačního algoritmu

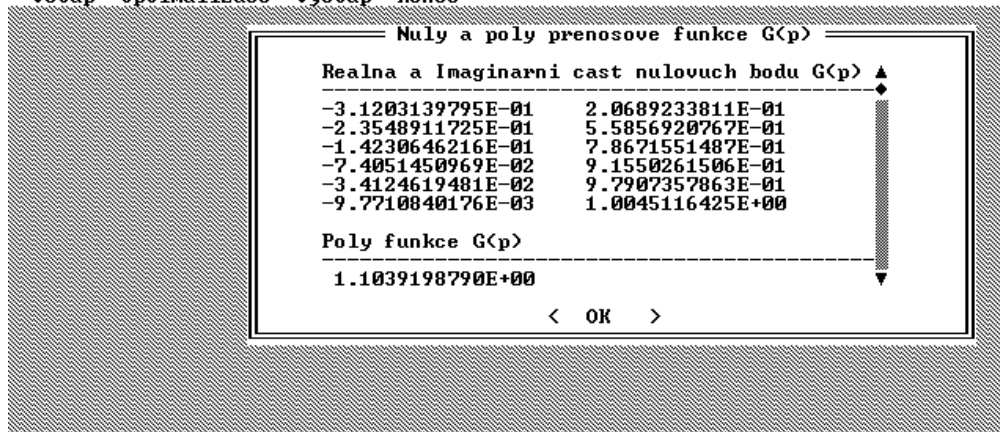
Ustup Optimalizace Uystup Konec



Zobrazeni nove polohy singularit charakteristicke funkce

Obrázek 4.11: Výsledky aproximace

Ustup Optimalizace Uystup Konec



Vypocet prenosove funkce filtru

Obrázek 4.12: Přenosová funkce



# Kapitola 5

## Příklady a kontrola výsledků

### 5.1 Návrh dolní propusti

Útlumové požadavky dolní propusti jsou dány tolerančním schématem podle obr. ??

Hodnoty tolerančního schématu zadáme v programu *NAPFIL* příkazem *Editace tolerančního schématu* (viz předchozí kapitola). Podle obr. ?? má tato dolní propust dva zlomy v propustném pásmu a tři zlomy v nepropustném pásmu.

Počáteční odhad umístění nul a pólů charakteristické funkce provedeme pomocí interní Cauerovy aproximace. Jako vstupní data Cauerovy aproximace použijeme nejprísnější útlumové požadavky vyplývající z tolerančního schématu na obr. ?? – mez propustného pásma - 1000 Hz, počátek nepropustného pásma 1100 Hz, maximální útlum v propustném pásmu - 0.1 dB, minimální útlum v nepropustném pásmu - 80 dB.

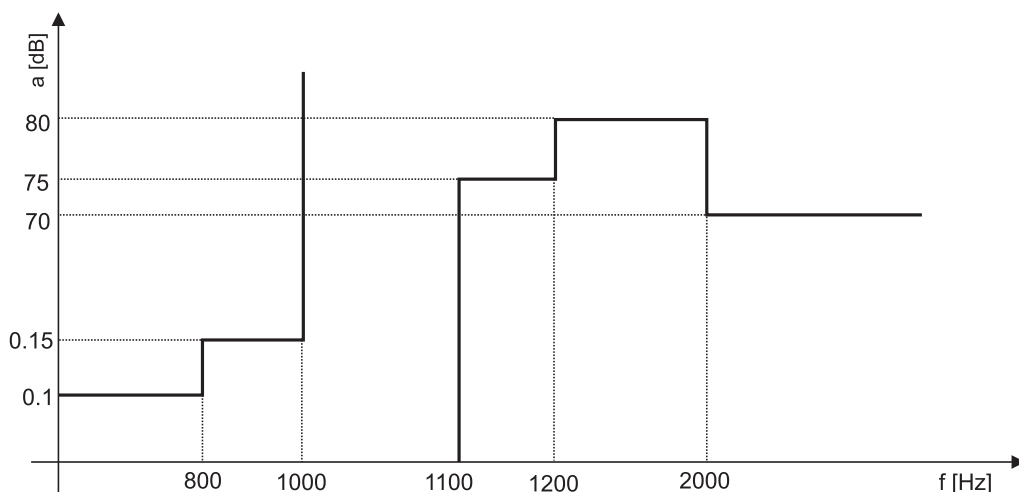
Výsledkem Cauerovy aproximace jsou kmitočty nul a pólů charakteristické funkce dolní propusti dvanáctého řádu. Tyto hodnoty budou dále použity jako vstupní odhad rozmístění singularit pro optimalizační proceduru.

Dále můžeme editovat rozmístění a vlastnosti zachycení singularit. Poté spustíme optimalizační proceduru a zkontrolujeme výsledky. Pokud průběh provozního útlumu nevyhovuje našim požadavkům, změníme parametry a znovu optimalizujeme.

#### 5.1.1 Výsledky příkladu

Výsledné rozmístění optimalizovaných nul a pólů charakteristické funkce zadané dolní propusti jsou uvedeny v tabulce ??.

Nuly normované přenosové funkce  $G(p)$  jsou uvedeny v tabulce ??. Přenosová funkce je kmitočtově normována hodnotou 1000 (mez propustného pásma). Násobná konstanta pro  $G(p)$  je vypočítána na okraji propustného pásma a její hodnota je  $G = 6,4675 \cdot 10^2$ .



Obrázek 5.1: Toleranční schéma dolní propusti

Graf provozního útlumu zadané dolní propusti je na obr. ???. Detail průběhu v propustném pásmu je na obr. ??. Na obr. ?? a obr. ?? je zobrazen průběh provozního útlumu v nepropustném pásmu<sup>1</sup>.

**Poznámka** Všimněme si průběhu provozního útlumu v nepropustném pásmu mezi druhým a třetím pólem. Pokud by optimalizační algoritmus vyrovnával útlum v lokálním extrému mezi oběma póly, došlo by k překročení zadaných útlumových požadavků.

V tomto případě byl zvolen způsob zachycení na hraně v nepropustném pásmu (viz kapitola o ovládání programu *NAPFIL*). Jiný způsob, jak řešit tento problém, je fixovat některý z pólů na určitém kmitočtu.

## 5.2 Návrh pásmové propusti

Útlumové požadavky pásmové propusti jsou dány tolerančním schématem podle obr. ??.

Počáteční odhad rozmístění singularit charakteristické funkce provedeme opět pomocí Caurovy aproximace. Caurovu aproximaci aplikujeme na nej přísnější útlumové požadavky vyplývající s nestandardního tolerančního schématu.

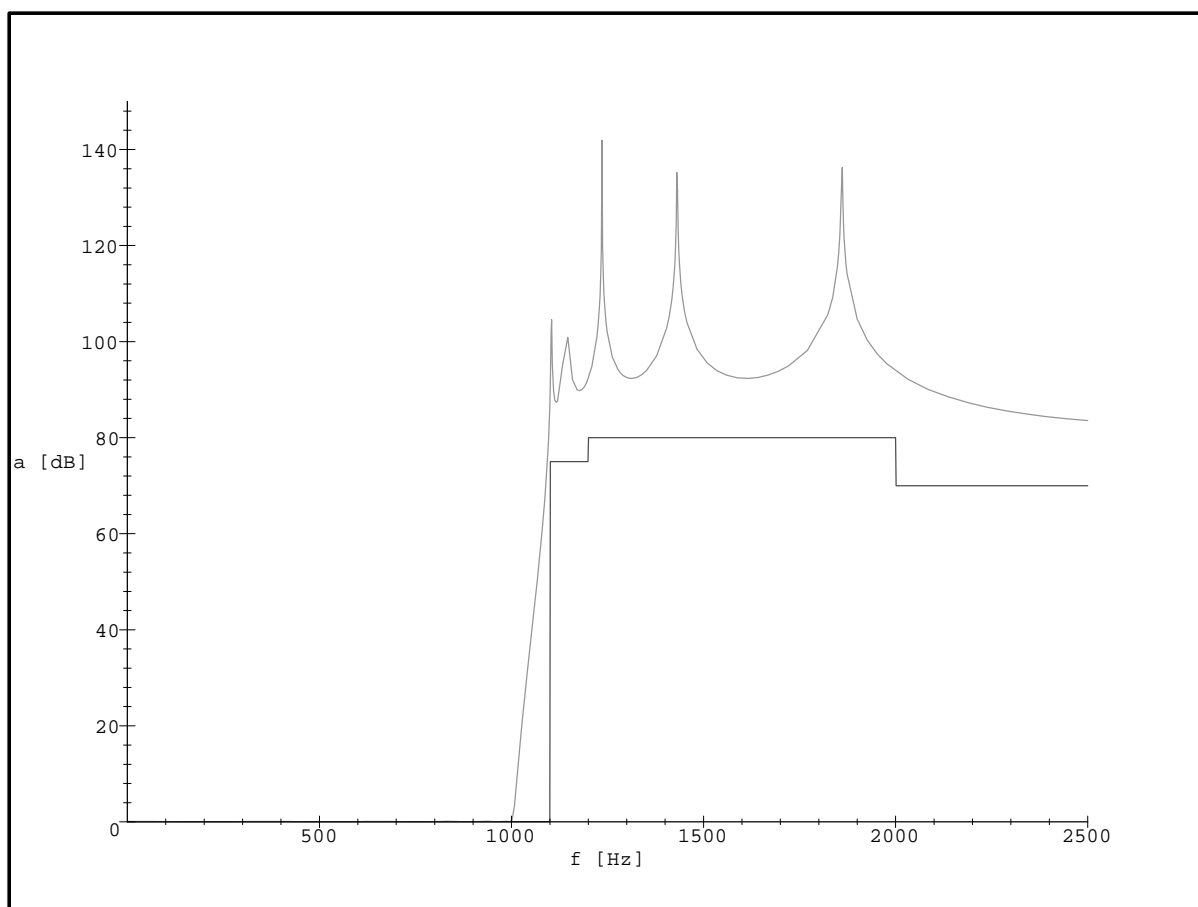
<sup>1</sup>Násobná konstanta  $G$  je vypočítána z požadavku útlumu na začátku nepropustného pásma, aby bylo dobře vidět vyrovnání rezerv optimalizačním algoritmem.

Nuly [Hz]	Póly [Hz]
189,036	1103,91
520,913	1141,52
749,203	1235,62
895,560	1431,12
967,460	1860,14
996,652	$\infty$

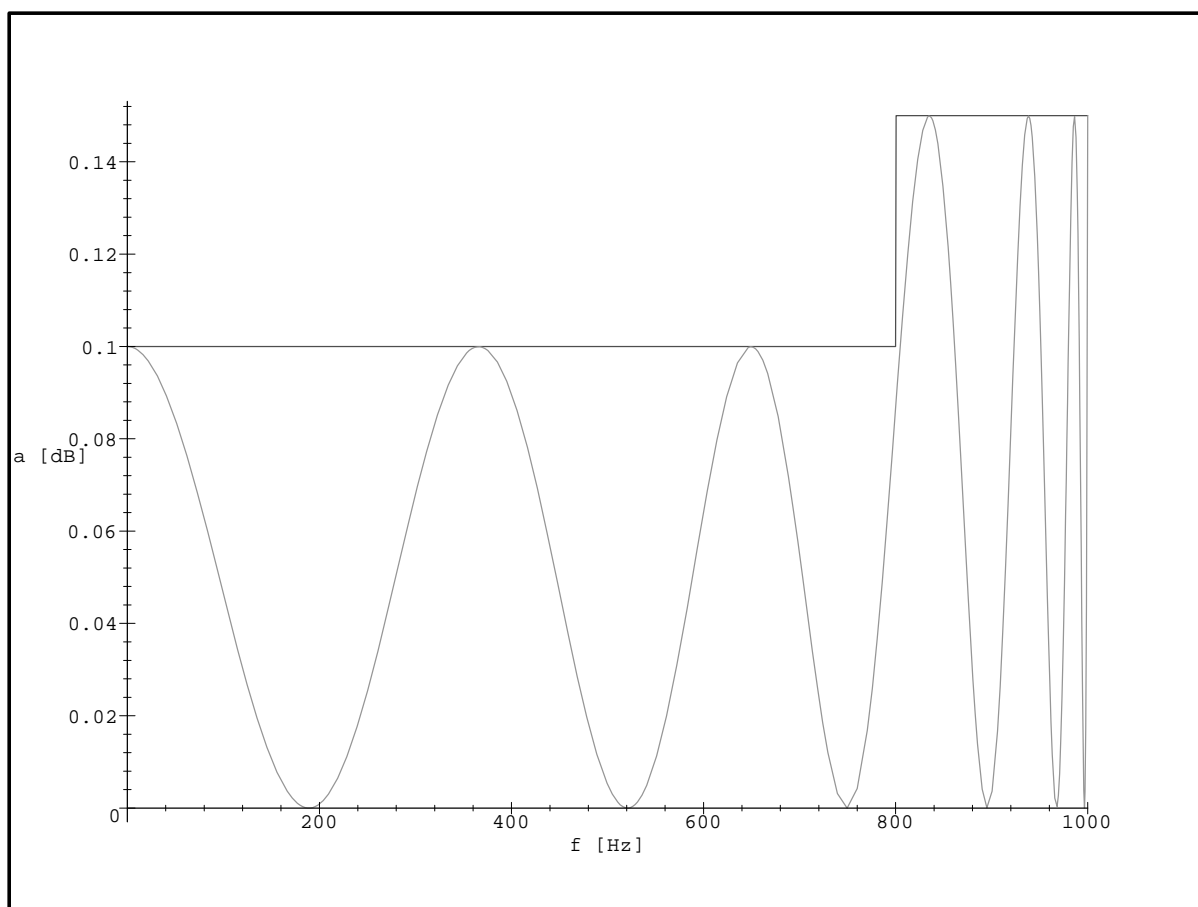
Tabulka 5.1: Nuly a póly optimalizované charakteristické funkce dolní propusti

Reálná část	Imaginární část
$-3,2102 \cdot 10^{-1}$	$2,0689 \cdot 10^{-1}$
$-2,3548 \cdot 10^{-1}$	$5,5857 \cdot 10^{-1}$
$-1,4230 \cdot 10^{-1}$	$7,8671 \cdot 10^{-1}$
$-7,4049 \cdot 10^{-2}$	$9,1550 \cdot 10^{-1}$
$-3,4121 \cdot 10^{-2}$	$9,7907 \cdot 10^{-1}$
$-9,7603 \cdot 10^{-3}$	1,0045

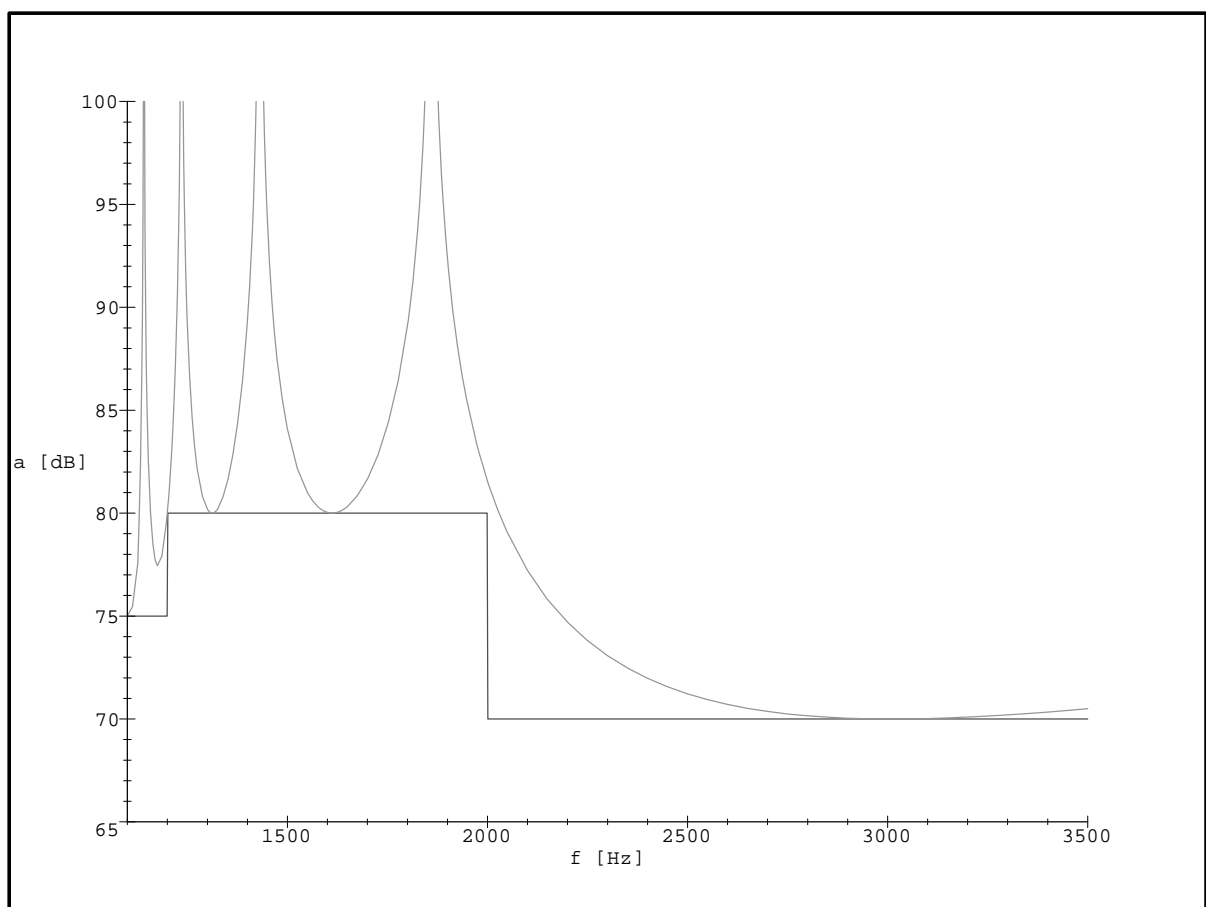
Tabulka 5.2: Nuly normované přenosové funkce  $G(p)$  dolní propusti



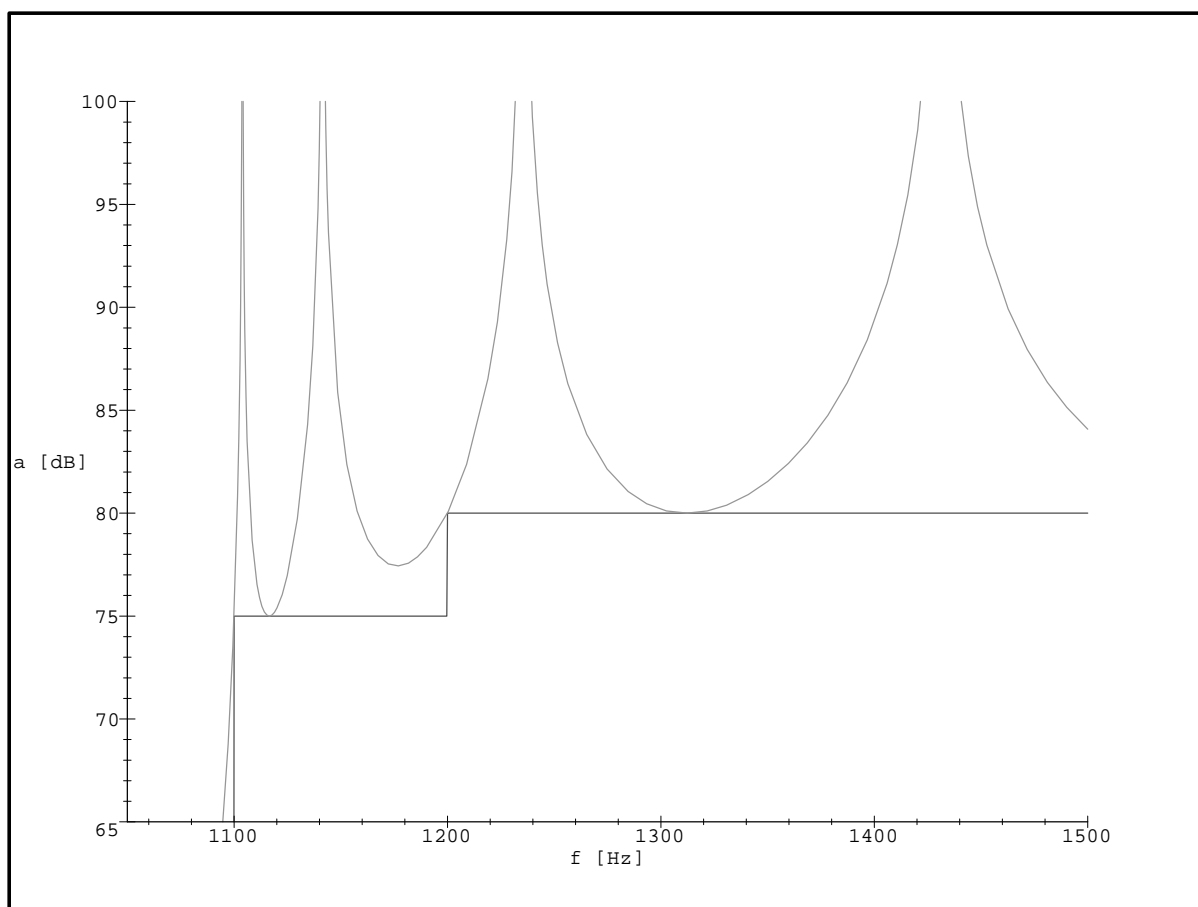
Obrázek 5.2: Průběh provozního útlumu dolní propusti



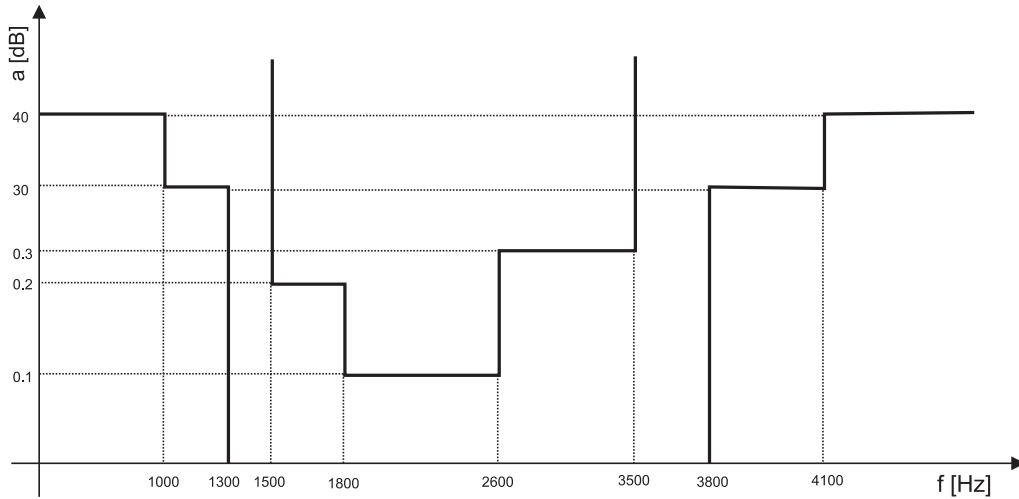
Obrázek 5.3: Průběh provozního útlumu dolní propusti v propustném pásmu



Obrázek 5.4: Průběh provozního útlumu dolní propusti v nepropustném pásmu



Obrázek 5.5: Průběh provozního útlumu dolní propusti v nepropustném pásmu – detail



Obrázek 5.6: Toleranční schéma pásmové propusti

### 5.2.1 Výsledky příkladu

Rozmístění nul a pólů optimalizované charakteristické funkce dané pásmové propusti je uvedeno v tabulce ??.

Přenosová funkce je kmitočtově normována hodnotou 2291 (geometrický střed propustného pásma). Násobná konstanta pro  $G(p)$  je vypočítána na levém okraji propustného pásma a její hodnota je  $G = 7,5586 \cdot 10^1$ . Nulové body funkce  $G(p)$  jsou uvedeny v tabulce ??.

Graf provozního útlumu pásmové propusti je na obr. ?. Detail průběhu v propustném pásmu je na obr. ?. Na obr. ? je ukázán průběh provozního útlumu

Nuly [Hz]	Póly [Hz]
1 517,44	0
1 693,83	3 847,61
2 077,41	4 237,68
2 646,39	5 237,95
3 245,09	966,02
3 475,31	1 278,24

Tabulka 5.3: Nuly a póly optimalizované charakteristické funkce pásmové propusti



Reálná část	Imaginární část
$-2,2209 \cdot 10^{-1}$	1,1988
$-1,9701 \cdot 10^{-1}$	$8,6601 \cdot 10^{-1}$
$-1,0539 \cdot 10^{-1}$	1,4500
$-8,4423 \cdot 10^{-2}$	$6,9962 \cdot 10^{-1}$
$-2,6604 \cdot 10^{-2}$	1,5359
$-2,0003 \cdot 10^{-2}$	$6,4582 \cdot 10^{-1}$

Tabulka 5.4: Nuly normované přenosové funkce  $G(p)$  pásmové propusti

v nepropustném pásmu<sup>2</sup>.

**Poznámka** Povšimněme si průběhu útlumu v nepropustném pásmu mezi prvním a druhým pólem. Stejně jako v minulém případě dolní propusti je i zde použita volba zachycení průběhu útlumu na hraně pásma.

## 5.3 Návrh horní propusti

Útlumové požadavky horní propusti jsou dány tolerančním schématem na obr. ??.

Podle obr. ?? má zadaná horní propust tři zlomy v nepropustném pásmu a dva zlomy v propustném pásmu.

Počáteční odhad rozmístění nul a pólů charakteristické funkce provedeme opět pomocí Caerovy aproximace. Tuto aproximace aplikujeme na nejprísnější požadavky vyplývající z nestandardního tolerančního schématu. Výsledkem Caerovy aproximace je horní propust desátého řádu.

### 5.3.1 Výsledky příkladu

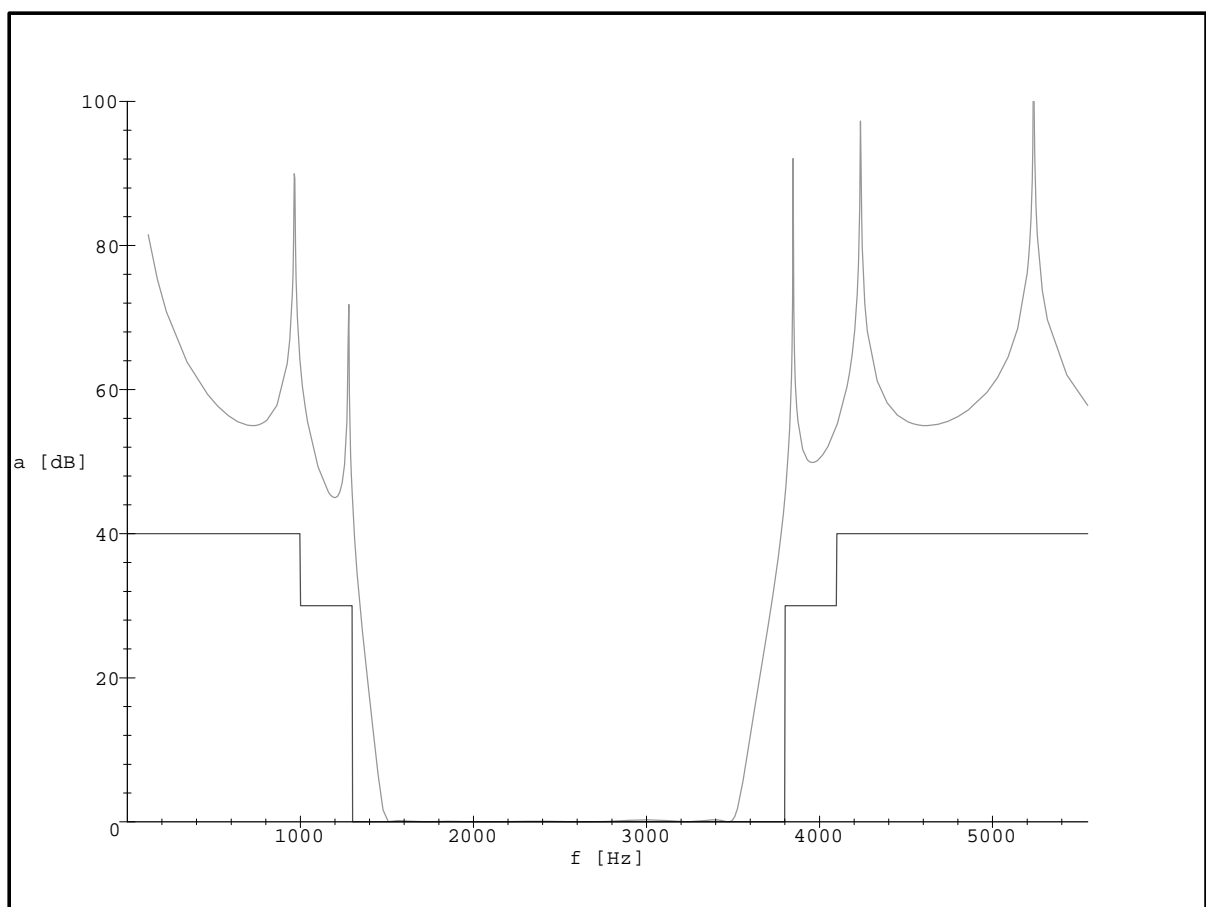
Rozmístění nul a pólů optimalizované charakteristické funkce zadané horní propusti je uvedeno v tabulce ??.

Přenosová funkce je kmitočtově normována hodnotou 1000 (mez nepropustného pásma). Násobná konstanta pro  $G(p)$  je vypočítána na počátku propustného pásma a její hodnota je  $G = 9,9999 \cdot 10^{-1}$ . Nulové body normované přenosové funkce  $G(p)$  jsou uvedeny v tabulce ??.

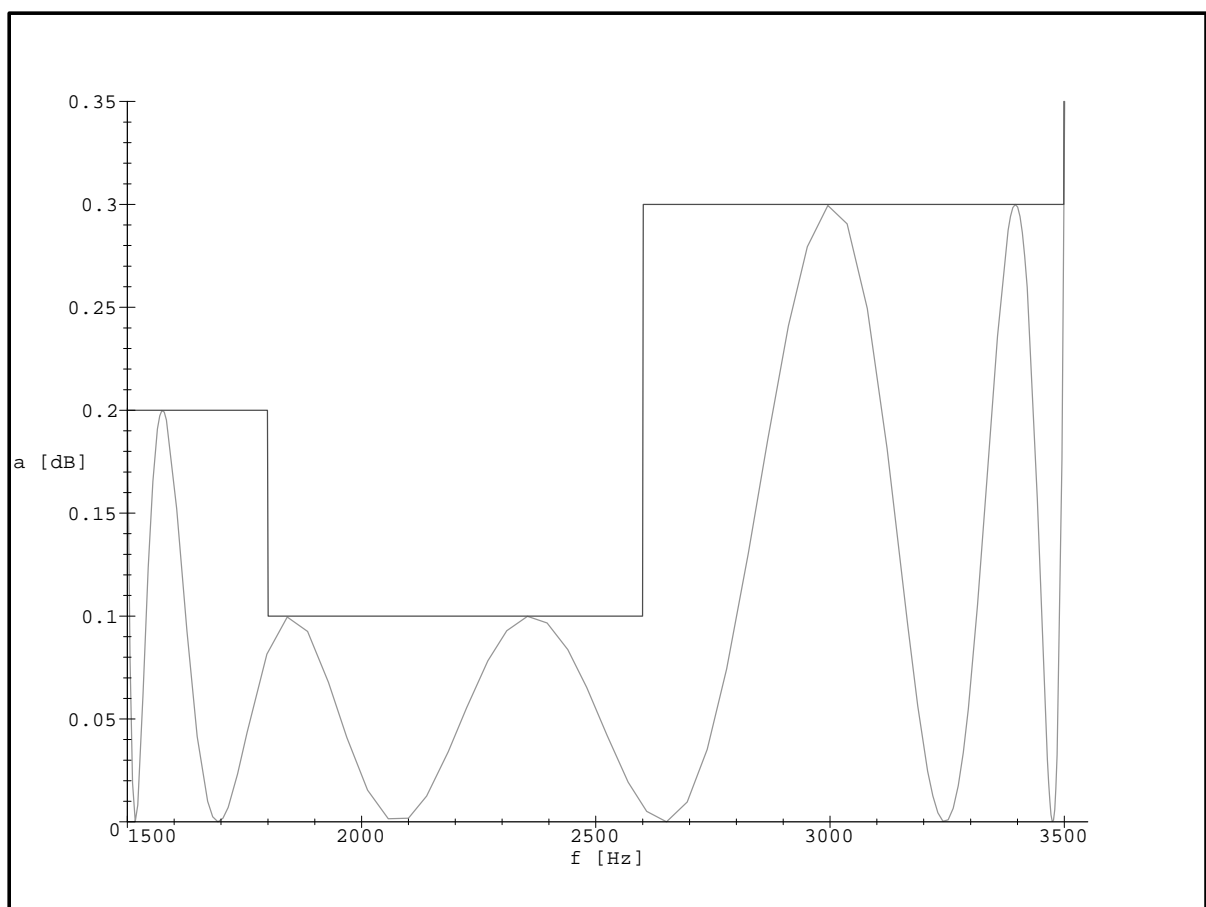
Graf provozního útlumu dané horní propusti je na obr. ?. Detail průběhu v propustném pásmu je na obr. ? a obr. ?. Na obr. ? je zobrazen průběh útlumu v nepropustném pásmu<sup>3</sup>.

<sup>2</sup>Průběh je zachycen na okraji nepropustného pásma.

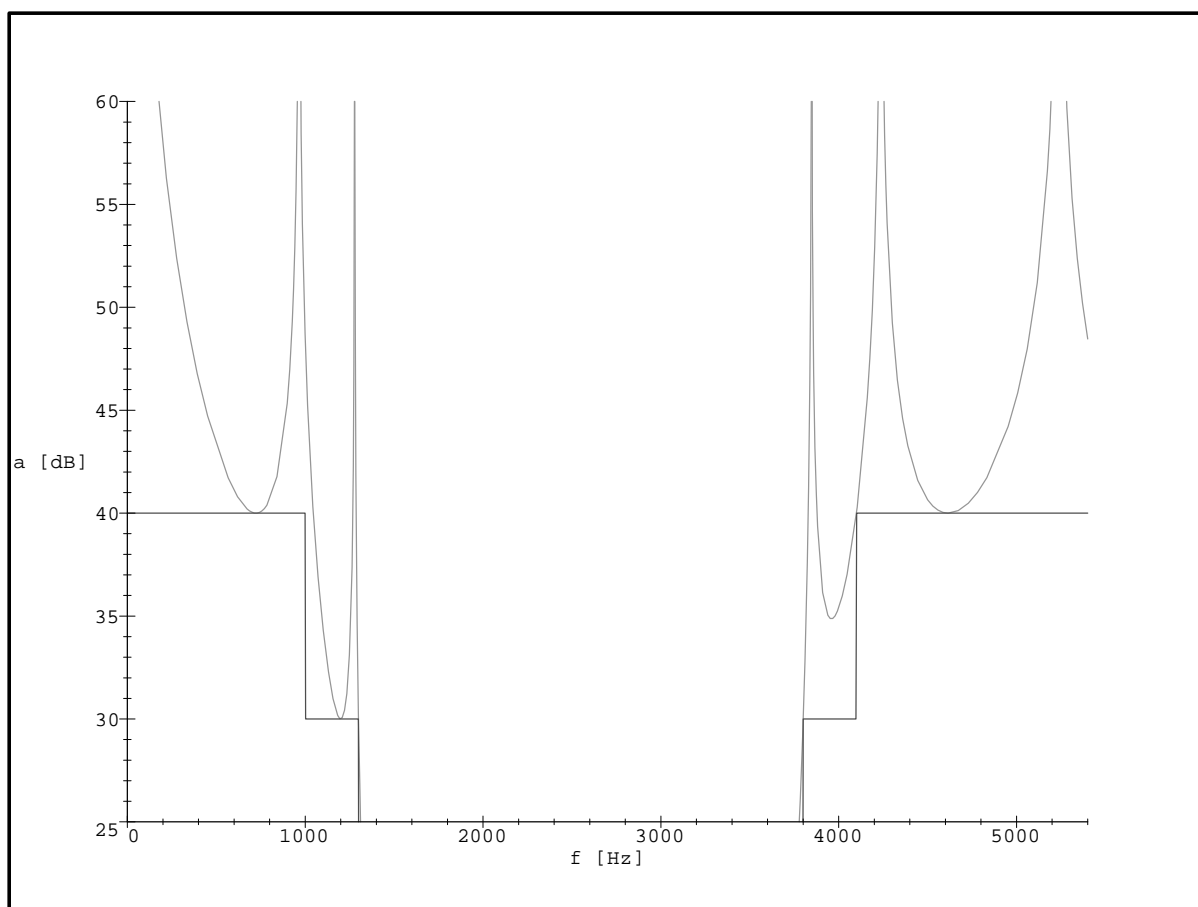
<sup>3</sup>Průběh útlumu je zachycen na okraji nepropustného pásma



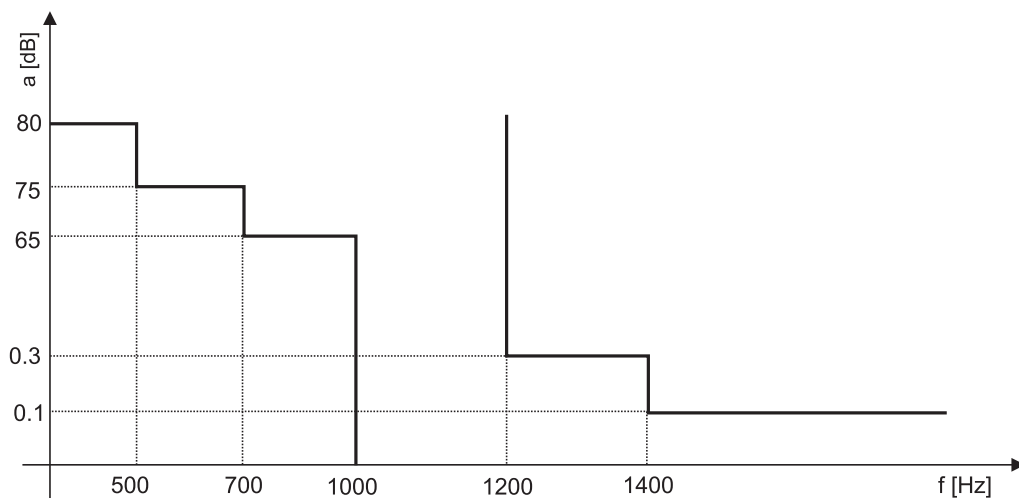
Obrázek 5.7: Průběh provozního útlumu pásmové propusti



Obrázek 5.8: Průběh provozního útlumu pásmové propusti v propustném pásmu



Obrázek 5.9: Průběh provozního útlumu pásmové propusti v nepropustném pásmu – detail



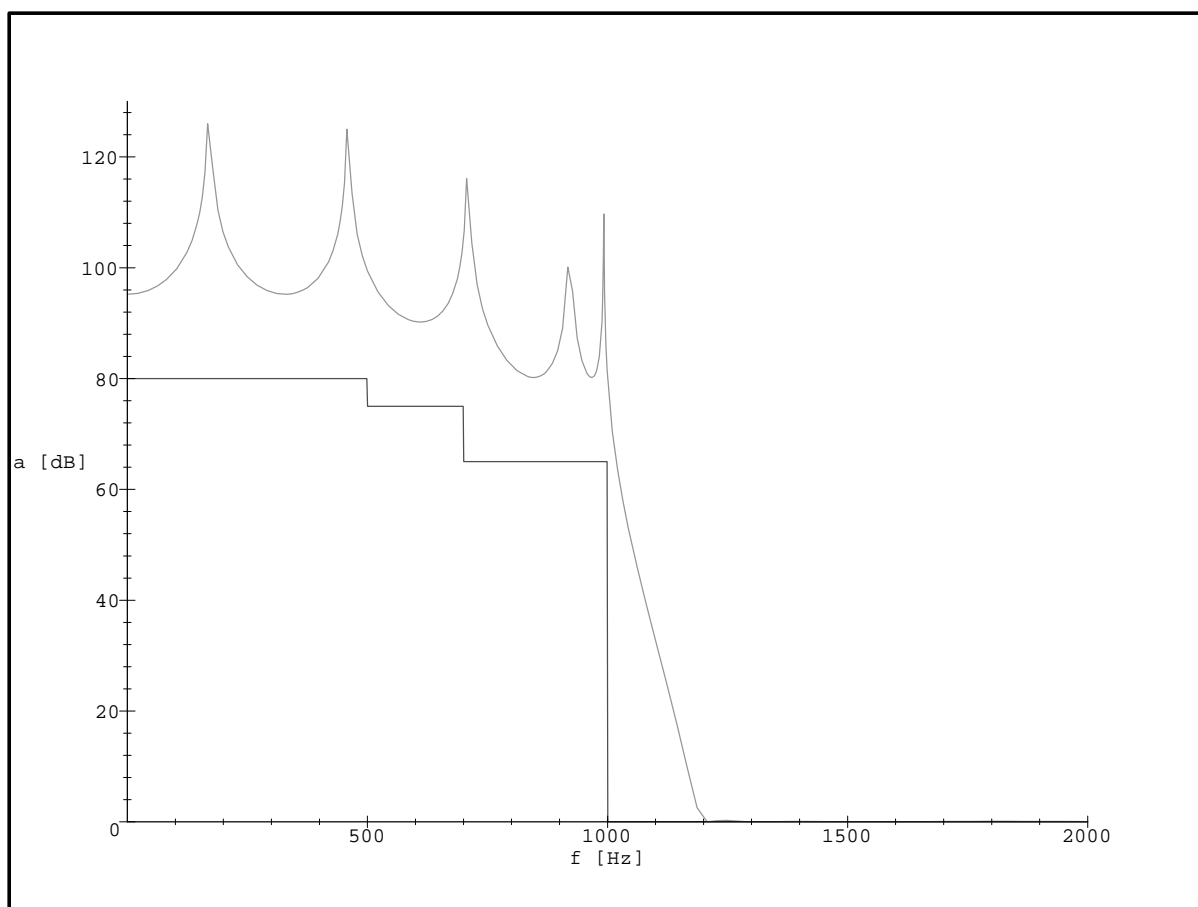
Obrázek 5.10: Toleranční schéma horní propusti

Nuly [Hz]	Póly [Hz]
2 334,05	992,04
1 553,05	921,03
1 313,55	708,80
1 209,85	459,33
$\infty$	170,18

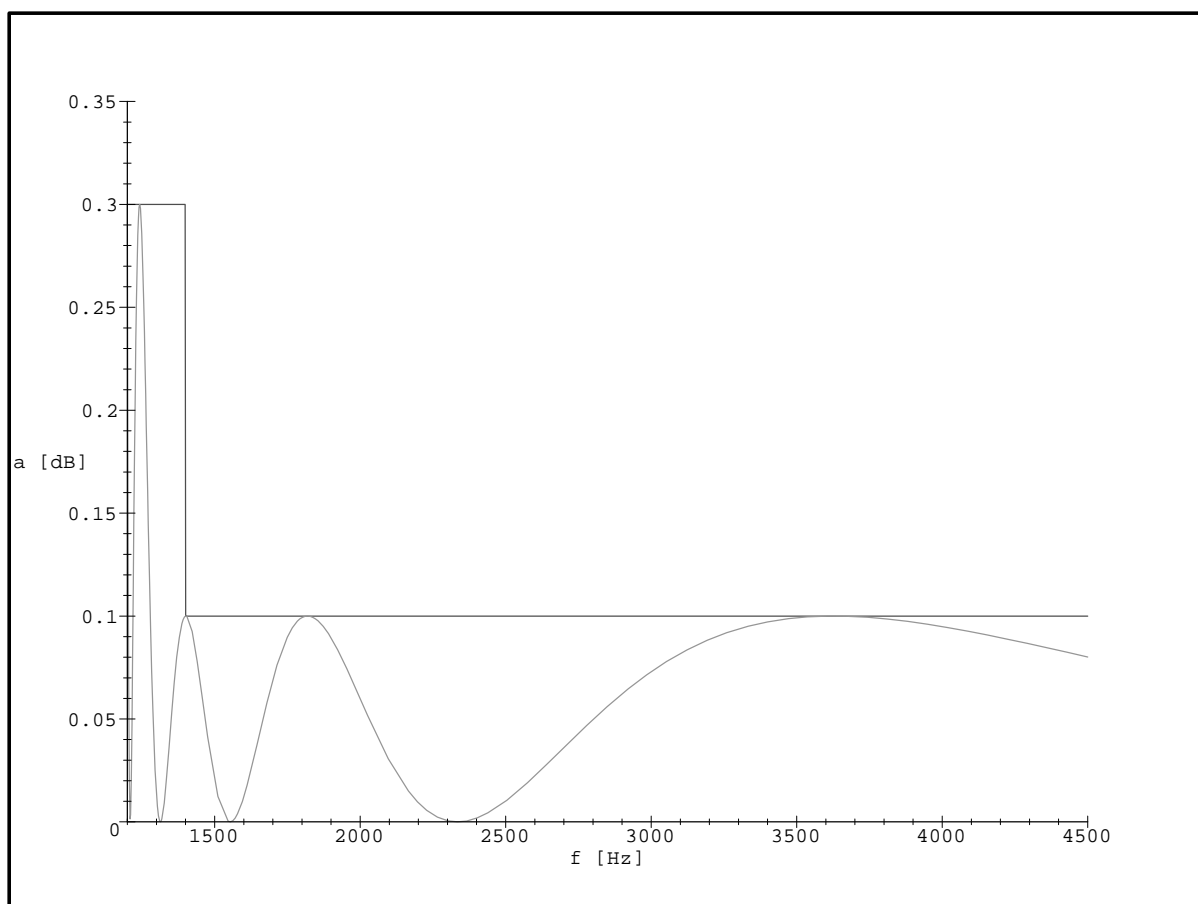
Tabulka 5.5: Nuly a póly optimalizované charakteristické funkce horní propusti

Reálná část	Imaginární část
-2,5490	1,3204
$-8,2451 \cdot 10^{-1}$	1,7486
$-2,7684 \cdot 10^{-1}$	1,4237
$-9,9957 \cdot 10^{-2}$	1,2607
$-2,4079 \cdot 10^{-2}$	1,1922

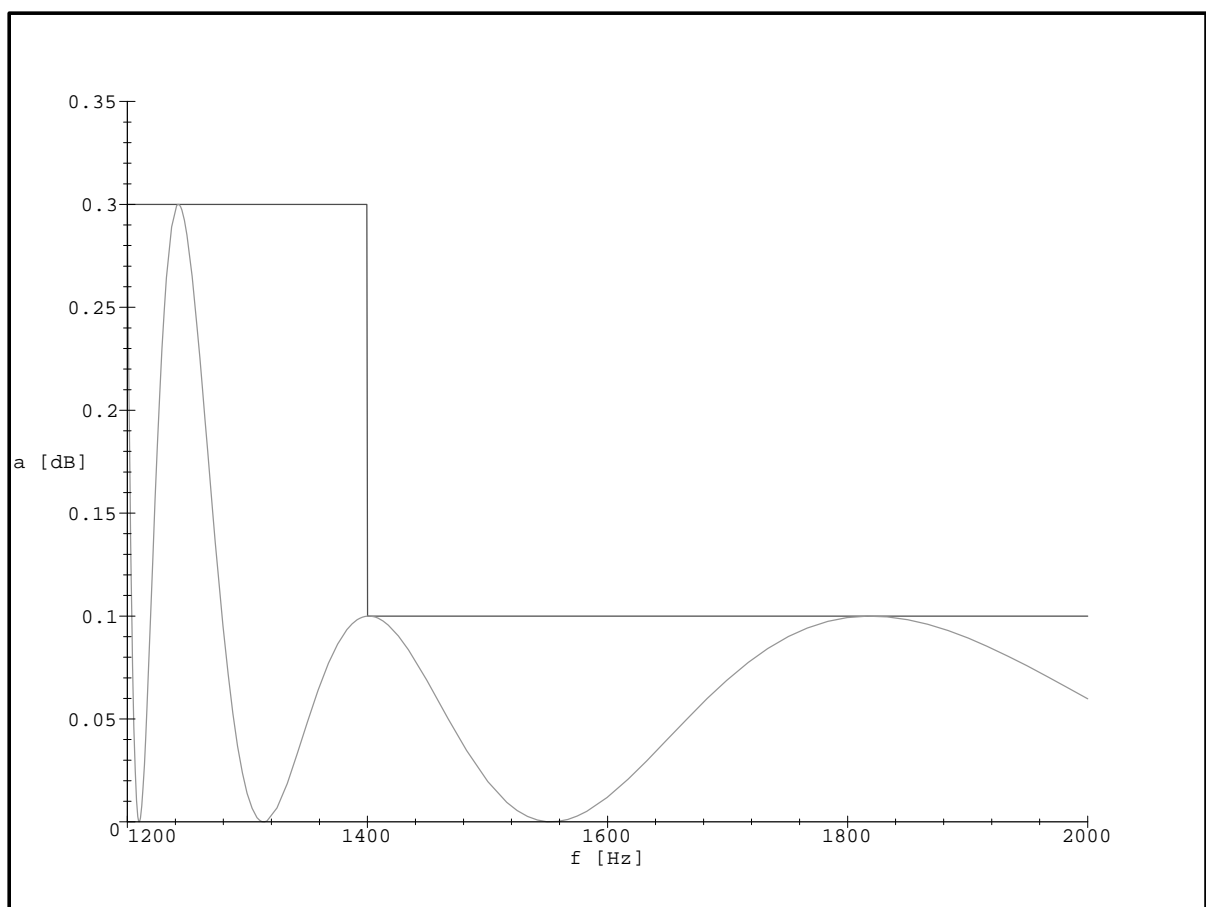
Tabulka 5.6: Nuly normované přenosové funkce  $G(p)$  horní propusti



Obrázek 5.11: Průběh provozního útlumu horní propusti

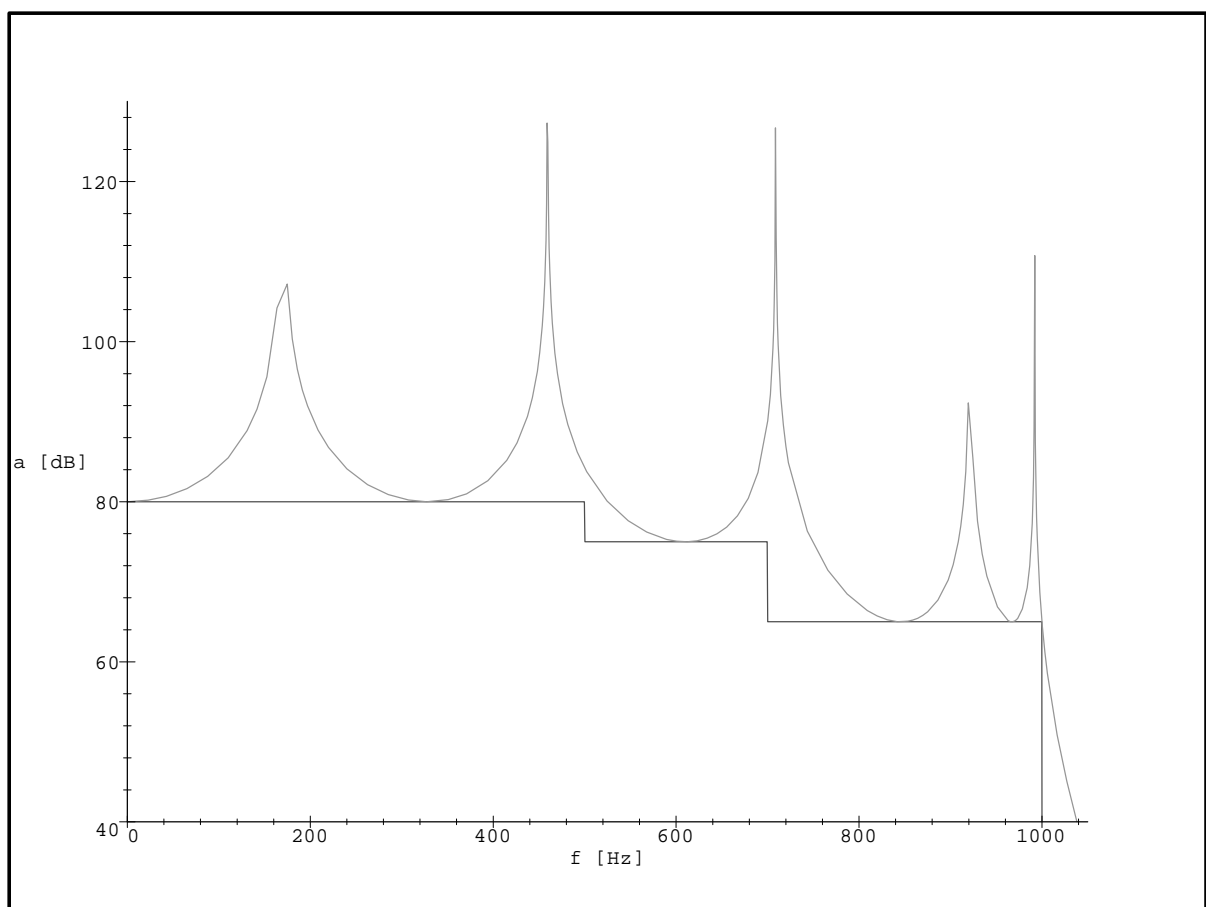


Obrázek 5.12: Průběh provozního útlumu horní propusti v propustném pásmu



Obrázek 5.13: Průběh provozního útlumu horní propusti v propustném pásmu – detail





Obrázek 5.14: Průběh provozního útlumu horní propusti v nepropustném pásmu

## 5.4 Problémy při návrhu

Návrh nestandardní přenosové funkce elektrického filtru je poměrně složitý a dosti rozsáhlý úkol. Aproximaci programem *NAPFIL* musí předcházet důkladný rozbor řešené úlohy. **Nelze očekávat, že program vyřeší všechny problémy spojené s návrhem zcela automaticky.**

Základním úkolem před spuštěním optimalizace je určení počátečních poloh nul a pólů charakteristické funkce. K tomuto účelu je v programu integrována Caurova aproximace. Ovšem ne ve všech případech lze použít výsledky této aproximace beze změn.

### Neočekávané ukončení běhu programu

V programu *NAPFIL* je ošetřena většina mezních stavů a numerických chyb. Přesto může v některých případech dojít ke zhroucení programu (zejména v případě pásmových propustí). Proto je vhodné před spuštěním optimalizačního algoritmu uložit zadaná data do souboru.

## 5.5 Ověření výsledků

Výsledné hodnoty programu *NAPFIL* nemohly být porovnány s výstupy jiných návrhových programů, neboť není znám programový prostředek, který by řešil tento problém obdobnou metodou a ve stejném rozsahu, jako program *NAPFIL*.

Všechny dílčí výsledky a použité numerické metody byly testovány jednoúčelovými programy v prostředí *MAPLE*. Také výsledné hodnoty vypočtených přenosových funkcí byly testovány na několika příkladech všech tří typů filtrů v programu *MAPLE*.

# Závěr

V této práci byla rozebrána úzká část problematiky návrhu selektivních soustav. Byl zde uveden velice efektivní algoritmus nestandardní aproximace přenosové funkce. Tento algoritmus je v práci detailně popsán, včetně numerických metod potřebných k jeho implementaci.

Použitý algoritmus umožňuje aproximovat přenosové funkce všech čtyř typů filtrů (*dolní, horní, pásmová propust a pásmová zádrž*) se stupňovitými požadavky na útlum v propustném i nepropustném pásmu. Algoritmus optimalizuje rozmístění nul a pólů charakteristické funkce filtru. Z optimalizované charakteristické funkce je dopočítána přenosová funkce. Výstupem je izoextremální průběh provozního útlumu v propustném i nepropustném pásmu, který sleduje schodovité toleranční schéma (jakási zobecněná Caurova aproximace).

Výsledkem práce je pak programový modul, který implementuje nejen výše uvedený optimalizační algoritmus, ale také další podpůrné prostředky nutné ke kompletnímu návrhu přenosové funkce elektrického filtru, jehož útlumové požadavky vycházejí z nestandardního tolerančního schématu.

Postup práce s uvedeným programem je vyloženo na několika příkladech návrhu různých typů filtrů. Výsledky těchto příkladů jsou zde podrobně popsány.

Program jistě najde uplatnění ve výuce na katedře teorie obvodů. Jako ucelený návrhový prostředek je předurčen k využití v technické praxi.

# Literatura

- [1] Eric Devleeschouwer, Francis Grenez: *An efficient procedure for the design of a large class of analog and digital filters*, IEEE Transactions in circuits and systems-II: Analog nad digital processing, vol. 39, no. 1, January 1992.
- [2] B.R.Smith, G.C.Temes: *An iterative approximation procedure for automatic filter synthesis*, IEEE Trans. Circuit Theory, vol. CT-12, no. 2, March 1965.
- [3] Lawrence R.Rabiner, Nancy Y.Graham, Howard D.Helms: *Linear programming of IIR digital filters with arbitrary magnitude function*, IEEE Transactions on acoustics, speech and signal processing, vol. ASSP-22, no. 2, April 1974.
- [4] Keneth Steiglitz: *Computer-Aided design of recursive digital filters*, IEEE Transactions on audio and electroacoustics, vol. AU-18, no. 2, June 1970.
- [5] M.T. Dolan: *Comments on „On the approximation problem for recursive digital filters with arbitrary attenuation curve in the passband and the stopband“*, IEEE Transactions on acoustics, speech and signal processing, December 1976.
- [6] Herve Dubois, Henri Leich: *On the approximation problem for recursive digital filters with arbitrary attenuation curve in the passband and stopband*, IEEE Transactions on acoustics, speech and signal processing, vol. ASSP-23, no.2, April 1975.
- [7] prof. Ing. Miloš Laipert, DrSc., RNDr. Miroslav Vlček, CSc.: *Lineární obvody*, Skripta ČVUT 1995.
- [8] Doc. Ing. Pravoslav Martinek, CSc., Ing. Petr Boreš CSs., Ing. Ivan Matzner CSc.: *Elektrické filtry*, Skripta ČVUT 1997.
- [9] Petr Novotný: *Nestandardní aproximace*, Diplomová práce 1995.
- [10] Miroslav Mžík: *MVK - Mini Vision Klasik*, Diplomová práce 1995.
- [11] Karel Rektorys a spolupracovníci: *Přehled užití matematiky*, SNTL 1973.

- [12] RNDr. Miroslav Dont, CSc.: *Numerické metody - cvičení*, Skripta ČVUT 1990.
- [13] RNDr. Miroslav Dont, CSc., RNDr. Anna Něničková, CSc., RNDr. Bohumír Opic, CSc.: *Numerické metody a matematická statistika - úlohy*, Skripta ČVUT 1984.
- [14] prof. Ing. Josef Kvasil, CSc., prof. Ing. Josef Čajka, CSc.: *Úvod do syntézy lineárních obvodů*, SNTL Praha 1981.
- [15] Anthony Ralston : *Základy numerické matematiky*, Academia Praha 1978.
- [16] Hans Jochen Bartch : *Matematické vzorce*, SNTL Praha 1971.
- [17] Doc. Ing. Karel Müller : *Počítače a programování I*, Skripta ČVUT 1990.
- [18] Doc. Ing. Karel Müller, CSc., Ing. Šimon Nešvera : *Počítače a programování II*, Skripta ČVUT 1993.
- [19] Doc. RNDr. Pavel Zörnig, CSc. : *Numerické metody*, Skripta ČVUT 1989.
- [20] Prof. RNDr. Bedřich Pondělíček, DrSc. : *Lineární algebra*, Skripta ČVUT 1992.
- [21] Robert Petr : *Universální programový modul pro aproximační úlohu v návrhových programech pro selektivní soustavy*, Diplomová práce 1994.